“Un moderno uomo del rinascimento”

Indice

1. Testimonianze

2. Il matematico

3. Il pedagogo

TESTIMONIANZA 1

<< Il compito di commemorare Lucio Lombardo Radice è certamente assai arduo, per la statura della sua poliedrica personalità scientifica, intellettuale ed umana. Sia per la vastità e l'importanza delle sue pubblicazioni, che ammonta a varie centinaia fra libri, dispense, saggi ed articoli (riguardanti l'algebra, la geometria, i fondamenti di matematica e della scienza, la didattica della matematica e ancora la pedagogia, l logica, la filosofia, la linguistica, la letteratura, l'arte, la politica); sia per il suo impegno di quotidiana militanza culturale e civile, che lo ha reso un protagonista della vita politica nazionale ed un promotore ed animatore di originali iniziative culturali, nell'università come nella scuola ed in tutto il tessuto sociale.
Un uomo completo, il quale *nihil umani a se alienum putat*; un uomo dotato di una grandissima vitalità, di un grande amore per la vita in tutti i suoi aspetti, di una visione serena del mondo, di profonda fiducia nell'uomo e nella ragione; un uomo gioioso che metteva quotidianamente in pratica il *ridentem dicere verum quid negat*?; un uomo serissimo che trattò magistralmente perfino i giochi per bambini come momento importante dell'educazione […]
Molti sono coloro che hanno scritto d e parlato di lui e della sua opera, in giornali, riviste, libri, dibattiti e convegni, ultimo quello organizzato per onorare la sua memoria dal Comune di Roma sul tema a lui particolarmente caro della "***Unità della cultura".***
Lucio Lombardo Radice era nato a Catania il 10 luglio 1916 da Giuseppe Lombardo Radice e Gemma Harasim. In un ambiente familiare aperto ai valori di diverse culture, filosofica, letteraria, storica e scientifica, si formarono la sua personalità e il suo amore per la libertà e per lo spirito di tolleranza. […]
Lucio Lombardo Radice compì brillantemente a Roma gli studi secondari presso **il liceo Mamiani** (1926-33) e quelli universitari (1934-38). All'università studiò sotto la guida di illustri matematici e grandi maestri. Attratto soprattuto dagli studi di algebra e geometria, ma anche vivamente interessato ai problemi della collocazione della matematica nella storia e nella cultura, predilesse fra tutti l'insegnamento di Guido Castelnuovo, Federigo Enriques e Gaetano Scorza; con quest'ultimo si laureò in Scienze Matematiche con pieni voti e lode nel 1938 […]
Il 1938 segna anche l'inizio, nelle file del Partito Comunista Italiano, di quel costante impegno politico e civile che egli visse sempre con abnegazione e generosità, diventando uno dei promotori della organizzazione giovanile antifascista romana. […] Nel 1939, dopo essere risultato idoneo in un concorso di Matematiche complementari, fu chiamato da Enrico Bompiani come assistente alla cattedra di Geoemetria Analitica. Il 21 dicembre 1939, nelle more della nomina, fi arrestato e condannato a quattro anni di carcere dal Tribunale speciale per attvività antifascista, con conseguente cessazione dagli uffici universitari. [..] Nel 1945 potè tornare con entusiasmo alle sue attività scientifiche, come assistente di ruolo di Geometria Analitica.
Nel 1946 sposò Adele Maria Temolo […] Nel 1956, in seguito a concorso, fu chiamato a Palermo, come professore straordinario alla cattedra di Geometria Analitica con Elementi di Proiettiva e Geometria Descrittiva con disegno della facoltà di Scienze di quella Università. Si trasferì con la famiglia 8 erano nati nel frattempo i tre figli: Daniele, Marco e Giovanni, ai quali dedicherà il libro "L'educazione della mente") […] Nel 1960 Lombardo Radice, che era diventato ordinario nel 1959, venne chiamato dalla facoltà di Scienze di Roma a ricoprire la omonima cattedra. [..] Passato alla cattedra di Algebra nel 1971 ed a quella di Matematiche complementari nel 1974, tenne anche vari incarichi di insegnamento […]
Il trasferimento alla cattedra di Matematiche Complementari riflette l'accettazione del suo impegno nel campo della didattica, al quale si era sempre dedicato con spirito rinnovatore, convinto com'era che bisognasse cominciare dal moderno. […] Dal 1976, fedele al suo amore per la concretezza, fu anche consigliere comunale a Roma. Divenuto uno dei maggiori teorici dell'eurocomunismo, visse il suo impegno politico e civile fino agli ultimi istanti della sua vita : il 21 Novembre 1982 fu stroncato da un infarto a Bruxelles, dove si era recato – quantunque non si sentisse bene- per partecipare ai lavori di un convegno per il disarmo nucleare europeo. […] vogliamo ricordare, per concludere, la sua passione per

l’insegnamento. I suoi studenti restavano affascinati dallo stile semplice e sereno, aperto e vibrante, frizzante e pacato, con cui svolgeva le sue lezioni: non certo in modo freddamente “cattedratico”, ma al contrario comunicando con grande calore umano le idee, le dimostrazioni. I metodi, i presupposti storici e gli sviluppi più recenti delle teorie che andava esponendo. Gli allievi sentivano in quelle sue parole i valori di una grande stradizione e di una grande cultura, vedevano nel suo sorriso quello dei ritratti rinascimentali dell’ “**uomo sapiente di molte cose**”, percepivano chiaramente in tutto il suo atteggiamento l’amore ed il rispetto con il quale egli si accostava a loro. È certamente questa l’immagine che i suoi numerosissimi allievi, che noi tutti, serbiamo di lui con altrettanto amore e rispetto.>>

Pier Vittorio Ceccherini, “*Lettera Pristem*”, Rivista trimestrale di cultura e informazione matematica, Febbraio 1993

TESTIMONIANZA 2

<< Cogliere la personalità di Lucio quand'era fra noi, vent'anni fa, era già difficile: come fare una fotografia a uno che non stava mai fermo. Adesso, con i tempi che corrono, è diventato quasi impossibile. Bisognerebbe dare corpo con esempi noti a un personaggio non semplicemente ricco di interessi culturali, bensì a un personaggio addirittura intellettualmente ingordo, sempre pronto a gettarsi nella mischia di uno scontro dialettico. Dov'è, oggi, un personaggio così? Ci sono intellettuali violenti, opportunisti, sopraffattori ma nessuno unisce come univa Lucio, disponibilità e passione, riflessività e impulsi. Non si sarebbe lasciato scappare un problema come il più scaltro dei mercanti non si sarebbe lasciato scappare un affare, non avrebbe mancato di informarsi minuziosamente su una vicenda politica o di costume per poi offrire la sua opinione al pubblico. Era ben consapevole del suo particolarissimo 'presenzialismo' (mi pare che oggi si dica così): ne rideva di gusto, come quando diceva "Sono vanesio, ma non riesco a trovarci niente di male". Oppure, ancora più divertito: "Fabiola mi ha detto: ma è proprio necessario scrivere? Sai che forse ha ragione?". Gli dicevamo: 'onnigrafo' e lui ci era grato, perché 'tuttologo' gli sarebbe suonato insulto.

Non c'era angolo dello scibile di cui non desiderasse sapere. Dalla matematica al mondo cattolico, dalla scuola alla fantascienza, dai diritti umani ai giochi per bambini. Passare le ore con lui era come girare rapidamente un caleidoscopio. Si prestava a fare da *macchina dei responsi* con i giovani, con le classi: "Fatemi domande" era il suo esordio con gli interlocutori. Come ha ricordato Mario Alighiero Manacorda, una volta Lucio andò in una scuola elementare, mi pare a Pelago, vicino Firenze, dove aveva chiesto ai bambini di *immaginarselo* prima di incontrarlo: e quelli, giù con il ritratto di un ottantenne che parlava difficile e solenne, con la certezza di essere destinati a un incontro noioso. Ma poi, un bambino scrisse che "invece era vispo come un capretto" e di questo ritratto Lucio gli fu grato per sempre.

Non posso fare a meno di mescolare le mie impressioni e i miei pregiudizi al ricordo di Lucio com'era: mi lascio andare a queste divagazioni pensando che è quello che avrei fatto con lui, anche se oggi mi mancherà il suo feedback, la sua reazione sempre utile e istruttiva. Il ricordo di Lucio com'era è oggi per me quasi penoso: da una parte, penso a come avrebbe sofferto per lo stato in cui questo paese si è ridotto, dall'altra, mi manca come avrebbe reagito. Non si può dimenticare che l'aggettivo più calzante, per Lucio, è ottimista: di lui, una volta ha scritto Emilio Garroni che "non aveva alcun assillante senso di morte"; ma è evidente che qui la parola morte trascende il corpo e la sua fine biologica e va a toccare eventi inauditi come la cancellazione della memoria, la soffocazione di un'arte o di una scienza, la perdita di una libertà. Quando il matematico José Louis Massera subì le vessazioni di una dittatura sudamericana (Uruguay, circa 1975), Lucio mise in moto la macchina della solidarietà con una irruenza che non ammetteva indugi; e lo stesso fece per il matematico Anatolji Sharanski le cui opinioni venivano represse dai sovietici. I libri di Lucio analizzavano spesso questi casi di "possibile morte spirituale" a seguito di persecuzioni: se di matematici si trattava, eravamo noi colleghi a essere sollecitati per primi; se di altri esponenti della cultura, era all'opinione pubblica che rivolgeva i suoi libri. Analizzava senza perifrasi il comportamento del potere e ne faceva denuncia circostanziata. Ma non era mai disponibile a uscire dai sentieri della dialettica democratica, sicché i suoi interventi nelle aule dense di giovani arrabbiati come quelli degli anni '60 non erano mai condiscendenti verso l'estremismo e il terrorismo. Lucio aveva un preciso senso delle conquiste civili e non aveva certo timore di alienarsi le simpatie giovanili dichiarando incivile l'assassinio di Moro o i proclami dei terroristi di quell'epoca.

Oggi, mi guardo intorno e vedo una grande desolazione. Non mi fanno impressione le vicende delle borse dei valori monetizzabili, perché ormai sapevo che sarebbero andati a finire così. Ma è il tracollo della borsa dei valori 'immateriali' che mi sconvolge e mi fa sentire la mancanza di Lucio. Per esercizio, provo a chiedermi che cosa avrebbe fatto, anche se mi rendo conto di doverlo estrapolare a un contesto inimmaginabile appena vent'anni fa.

Già, che cosa avrebbe fatto Lucio? Certamente, la sua penna (non oso dire il suo computer) avrebbe galoppato come un cavallo infaticabile per pagine e pagine di considerazioni sulla perdita di identità di una tradizione culturale. Rivolte a chi? Infatti, questo è il punto. Ma Lucio avrebbe parlato soprattutto e prima di tutto ai suoi, da compagno scomodo come si era autodefinito entrando nel comitato centrale del

Pci. La sua scomodità consisteva poi nel sottolineare e mettere in luce debolezze e insufficienze della grande politica della sinistra: abbiamo fatto tutto ciò che si doveva perché il tema del pacifismo qualificasse tutta la politica della sinistra? Abbiamo fatto le cose giuste per la scuola pubblica? Abbiamo considerato con la dovuta attenzione e con proposte praticabili il problema del lavoro giovanile? E così via: posso solo dire che, se uno come me, insieme a molti altri, pensa che forse non tutto il possibile è stato fatto per rendere l'innovazione sociale apprezzabile e ben comprensibile, Lucio, al confronto sarebbe stato un fiume in piena di 'provocazioni', un flagello.
Purtroppo, il ***tipo Lucio Lombardo Radice*** non c'è. Lucio è morto perché non si è risparmiato, come Enrico Berlinguer, come Luigi Petroselli: spiriti a lui abbastanza congeniali. Non c'è tra i Democratici di sinistra, non c'è ancora più a sinistra, non c'è nel sindacato, non c'è tra i liberali-socialisti illuminati, non c'è tra i cattolici che lui rispettava, non c'è tra i nuovi gruppi di intellettuali. Non c'è come tipo umano di questo mondo in cui i valori materiali sono crollati visibilmente in basso, anche prevedibilmente visto il loro carattere prevalentemente virtuale. Ma i valori immateriali sembrano addirittura scomparsi, annebbiati da apparenze, da finzioni pubblicitarie, da negazioni spudorate della realtà etica, dalla cura del particulare, come Lucio amava chiamarlo. Perciò, permettetemi di suggerire - e so che a Lucio avrebbe fatto piacere - che dobbiamo fare in modo che ne nasca un altro, per poterlo spalleggiare nella sua critica disinteressata. Non porterà via posti e cariche a nessuno: se sarà proprio come Lucio, sarà solo una buona coscienza incarnata. E anche se questo potrà apparire un'esigenza antiquata e non tanto nello spirito (barbarico) dei tempi, non è poco.>>

Il testo è la trascrizione dell'intervento pronunciato da Carlo Bernardini al convegno che la Fondazione "Istituto Antonio Gramsci" ha dedicato a Lucio Lombardo Radice: Lucio Lombardo Radice 'scienziato umanista'. Giornata di studi e testimonianze a vent'anni dalla scomparsa, 28 novembre 2002, Roma, Museo di Roma in Trastevere.

TESTIMONIANZA 3

<< Apprendo con dolore la notizia della scomparsa improvvisa del professor Lucio Lombardo radice, amico carissimo, scienziato illustre, uomo della cultura e della scuola, militante democratico, sempre rigoroso e coerente con i suoi ideali di pace , di libertà, di giustizia e di elevazione umana. È ancora vivissimo nel mio animo il ricordo del nostro recente incontro con i suoi nipoti, durante il quale l'ho visto illuminato dalla gioia e dalla speranza. Egli lascia un grande vuoto nella nostra vita democratica e cultural, perché era una voce autorevole umana inspirata ad altissimi principi. >>

Il commosso ricordo di Pertini d*a L'Unità del 22 Novembre 1982*

IL MATEMATICO

Il metodo matematico

<< Ebbene, la matematica è (può essere) ***uno*** degli elementi unificanti tanto di tecnica e pensiero, quanto del pensiero stesso. Uno, abbiamo detto, ***non l'unico***. >>

dall'introduzione di Lucio Lombardo Radice: *Matematica cultura scuola*, al testo di Herbert Meschkowski "Mutamenti nel pensiero matematico", Boringhieri

<< Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è ***solo*** tecnica e non ***anche*** cultura generale; ***solo*** calcolo e non ***anche*** filosofia, cioè pensiero valido per tutti, non avrei fatto il matematico (non continuerei a farlo). [..] Questo mio modo di essere matematico corrisponde ad una tradizione umanistica della matematica, particolarmente forte e consapevole in Italia [...] È una tradizione che è, nello stesso tempo, un'antica e spesso drammatica lotta del matematico italiano per affermare – fuori dalla sua "provincia scientifica"- il valore della sua scienza come cultura e pensiero di tutti.>>

Da L. Lombardo Radice, *Istituzioni di algebra astratta*, Milano,Feltrinelli, 1965

<<Le idee matematiche sorgono nella empiria>> (cioè nell'esperienza) <<se pure la genealogia è spesso lunga e oscura>>. Questa affermazione è stata fatta da uno dei più grandi matematici, John von Neumann (1903 -1957). Eppure, si badi bene, von Neumann ha sviluppato alcune delle teorie più astratte della matematica moderna, non è stato per nulla un empirista.
La matematica, infatti non è essa stessa empiria, ma sorge dall'empiria. […]
La matematica non è una materia, è un metodo. Non è uno scaffale del sapere, quello che contiene formule, costruzioni mentali, astrazioni, che sembrano nascere le une dalle altre, per partenogenesi. È un metodo: il metodo che porta da situazioni fisiche a situazioni mentali, da strutture reali a strutture astratte, che però hanno a che fare con le strutture reali di partenza, sono un loro estremo perfezionamento (un loro limite). […] Ci accorgeremo, in tutti i processi di matematizzazione che faremo, che **l'astrazione finale è più ricca della realtà dalla quale è venuta fuori**. […] Conviene perciò, quando li si è costruiti impiegando il metodo matematico, studiare gli **schemi finali** in sé, nella loro struttura logica e formale, indipendentemente dal contenuto. Perché a uno stesso schema non è legato un contenuto, ma tanti, non un concreto, ma molti. L'**astratto** non è la negazione , è la moltiplicazione del concreto, è un **multiconcreto**.>>

Da L. Lombardo Radice- L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, Principato, 1981]

Il Laboratorio Didattico

<< […] Emma Castelnuovo e Lina Mancini Proia, due insegnanti cui è profondamente legato il rinnovamento dell’insegnamento della matematica, non solo in Italia, conobbero Lucio sui banchi universitari, seguendo le lezioni di Enriques […] Alla fine degli anni ’60 Lucio cominciò ad inviare laureandi nelle classi di Emma e Lina, e poi di altri insegnanti, affinché svolgessero sotto la loro guida tesi in didattica della matematica. Pochi anni dopo fondò, presso l’Istituto Matematico Guido Castelnuovo, il “**Laboratorio Didattico**”, di cui hanno fatto parte nel corso degli anni borsisti insegnati e alcuni elementi stabili (Mario Barra, Lucilla Cannizzaro, Margherita Fasano, Marta Meneghini, Nicoletta Lanciani). Le iniziative così intraprese ebbero successo: si creò una ambiente di lavoro comune tra insegnanti esperti,, universitari e giovani laureandi e neo- laureati che permise a molti insegnati di avvicinarsi al proprio lavoro non solo con entusiasmo e passione, ma anche con la consapevolezza che occorresse svolgere ricerche nel settore della didattica.
Quando nel 1979 Emma e Lina andarono in pensione, il “laboratorio Didattico” dedicò una mostra-convegno all’accademia dei Lincei. Il titolo “Omaggio a Emma e Lina” è naturalmente di Lucio. Mi piace ricordare che l’affluenza alla mostra fu tale da richiedere la presenza dei vigili nelle sale della Palazzina Farnese.[…]>>

Marta Meneghini , “*Lettera Pristem*”, Rivista trimestrale di cultura e informazione matematica, Febbraio 1993

L'Algebra astratta

Lucio Lombardo Radice, Polimath 14 aprile 1972

<< *Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è solo tecnica e non anche cultura generale; solo calcolo e non anche filosofia, cioè pensiero valido per tutti, non avrei fatto il matematico (non continuerei a farlo).*

La locuzione « algebra astratta» non è del tutto felice. Né è rigoroso l'aggettivo «moderna» adoperato un tempo per qualificare l'algebra dei primi decenni del nostro secolo. La prima sistemazione di tale nuova algebra fu compiuta dall'olandese Bartel Ludwig van der Waerden in un'opera pubblicata all'inizio degli anni trenta, dal titolo Algebra moderna. Dopo qualche decennio, questo libro è diventato un « classico », e l'autore ha saggiamente lasciato cadere l'aggettivo, riducendo il titolo alla sola parola Algebra. Il fatto è che, come è caduco il concetto di « moderno », così è del tutto relativa la qualifica di « astratto ». La matematica è sempre « astratta »; anche il numero naturale, suo fondamento primo, è bene un' astrazione! Quanto all'« algebra classica », quella che oggi si studia nelle scuole secondarie superiori (con qualche anticipazione alla scuola media) non solo è un'astrazione, ma è un'astrazione di alto livello, frutto di una lunghissima elaborazione di parecchie civiltà, dalla greca all'indiana all'araba (il nome algebra viene dall'arabo). « Questa è algebra! » è addirittura un modo di dire, per indicare qualcosa di così astratto da risultare incomprensibile all'uomo comune; ed è un modo di dire nato ben prima del libro di Van der Waerden, o dei coevi primi volumi della monumentale opera Elementi di matematica del famoso gruppo Bourbaki. Ebbene, quell'« algebra» che nel linguaggio comune simboleggia il colmo dell'astrazione, diventa «concreta », per così dire « materiale », «fattuale », «empirica », rispetto ai nuovi sviluppi della teoria, rispetto cioè ad astrazioni di gran lunga più potenti. Bisogna però stare bene attenti a non considerare queste astrazioni come ultime: già oggi infatti le intravediamo superate e ridotte a materiale concreto da astrazioni di livello ancora più elevato. Si può dire che la storia dell'algebra è un'incarnazione particolarmente efficace e trasparente della dialettica dell' astrazione, che opera in tutte le costruzioni intellettuali, e nella quale un determinato livello di astrazione viene «negato» in un ulteriore sviluppo, viene considerato «caso particolare», «concreto» da un punto di vista più elevato e più comprensivo. Naturalmente, il «salto» da un livello ad un altro - che è pure un vero e proprio « salto », un momento di discontinuità - viene preparato da un'elaborazione, che nel passaggio dall'algebra indiano-araba all'algebra astratta nel senso di Bourbaki è durata parecchi secoli, diciamo pure un millennio.
È bene soffermarsi almeno su qualche punto critico di questa lunga elaborazione, prima di dare una idea (a di tentare di dare un'idea!) dell'odierna astrazione algebrica.
Verso la metà del XVI secolo, nell'Europa occidentale - alla quale l'algebra araba era arrivata facendo. il giro del Mediterraneo, attraverso la Spagna e i mercanti delle repubbliche marinare italiane i matematici possedevano quel calcolo algebrico « letterale» che oggi si insegna ai ragazzi tra i 14 e i 16 anni, o anche prima. Scrivevano una equazione, per esempio. in un'incognita x, usando. lettere quali a, b, c, ecc., per indicare coefficienti numerici suscettibili di valori scelti a piacere; trasportavano da un membro all' altro di una equazione un addendo cambiandone il segno (questa è l'operazione che gli arabi chiamavano. al-giabr, donde algebra per latinizzazione); cercavano formule generali per risolvere una equazione qualunque di un dato grado. Al nostro simbolismo algebrico di aggi, così chiaro, preciso ed elegante, si è arrivati dopo un altro secolo di lavoro. Chi ha occasione di vedere l'edizione originale dell'Algebra di Rafael Bombelli (che è del 1581), rischia di non riconoscere la più semplice equazione, perché il quadrato viene chiamato «censo» e il termine di primo grado. «cose », o perché i simboli delle quattro operazioni e delle estrazioni di radice sono molto diversi dagli attuali.
Si tratta, però, di differenze formali, non intrinseche: il livello di astrazione del calcolo letterale, della «equazione generale» di un dato grado. era stato raggiunto. Per quel che riguarda i numeri « accettati » dagli algebristi del Cinquecento, si erano fatti del pari grossi passi in avanti sulla via dell'astrazione. Venivano. accettati numeri negativi, venivano presi in considerazione radicali comunque complicati.

Sempre, però, un« numero» per essere« numero» doveva essere il risultato di operazioni riconducibili a operazioni su interi concretamente eseguibili. La radice quadrata di 2, benché calcolabile solo con approssimazione, non presentava difficoltà concettuali: si trattava infatti di determinare, con crescente approssimazione, un numero decimale che moltiplicato per se stesso desse per risultato 2. Ciò che invece appariva assurdo ai primi algebristi del Cinquecento. era «accettare come numero» la radice quadrata di un numero negativo, per esempio la radice quadrata di - 1; perché il quadrato di un numero ordinario (o reale, come dicono i matematici) è sempre positivo, tanto nel caso che il numero sia positivo, quanto nel caso che sia negativo (una delle poche cose che tutti ricordano della matematica delle scuole è la famosa «regola dei segni» che dice: «meno per meno uguale più»). Eppure, per trovare le soluzioni reali di certe equazioni di terza grado, gli algebristi italiani furono costretti a fare i calcoli su questi numeri immaginari, privi di realtà; dovettero avventurarsi per obscuras ambages, percorrere misteriosi passaggi, come dirà con ammirazione (ma senza imitarli), attorno al 1630, il geometra purissimo Bonaventura Cavalieri.

Fu proprio il Bombelli che abbiamo poco fa menzionato - ingegnere idraulico e matematico al tempo stesso - a dare sistemazione teorica al calcolo sui numeri immaginari e complessi, prima di lui compiuto forzatamente ed empiricamente. Si tratta di cosa ben diversa dalla codificazione, per esempio, delle regole di calcolo sui negativi o sulle radici. Numeri negativi e radici sono bene misura di qualche cosa: di un debito, del lato di un quadrato di area data, o di un cubo di volume assegnato e così via. Ma la radice quadrata di - 1, di quale realtà è misura? di quale rappresentazione concreta è suscettibile?

La risposta di Bombelli, in sostanza, è che non ha importanza alcuna il fatto che la radice quadrata di « meno uno» sia reale o immaginaria, risultato di una misura, di un calcolo effettivo o parto dell'immaginazione. Consideriamo la radice quadrata di - 1 come un puro simbolo, che possiamo chiamare i (iniziale di «immaginario»), e che gode della proprietà di dare per risultato - 1 se viene moltiplicato per se stesso, cioè se viene elevato al quadrato. Dopo di che chiamiamo numero complesso la somma (formale) di un numero reale a e di i moltiplicato per un altro numero reale b, cioè il simbolo a + b x i, e impiantiamo un calcolo su questi simboli, imponendo la validità delle regole di calcolo ordinarie (per esempio commutatività e distributività), più la regola speciale $i^2 = - 1$.

C'è così un salto dal livello di astrazione dell' aritmetica del concreto a quello del calcolo formale su puri simboli. Per arrivare al concetto di «struttura algebrica », cioè al livello di astrazione successivo, occorre concepire tutto in modo formale e simbolico. Si devono cioè introdurre calcoli nei quali né i « numeri» né le « operazioni» sono definiti in modo concreto; ciò che è dato, sono soltanto le regole, le cosiddette « proprietà formali» delle operazioni.

Il primo a rendersi pienamente conto di questo nuovo livello di astrazione fu l'inglese George Boole, che fondò verso la metà del secolo scorso l'algebra della logica, considerando per esempio come «numeri» (cioè come oggetti del calcolo), gli «attributi» (rosso, uomo, solido, fiore ecc...) e come «operazioni» la congiunzione, espressa dalla particella «e », l'alternativa, espressa dalla particella « o » (nel senso del latino vel), la negazione « non ». Ma già all'inizio del passato secolo grandi novatori della matematica, come il francese Galois, il norvegese Abel, il tedesco Gauss, avevano costruito o sviluppato concretamente calcoli non numerici, in primo luogo il calcolo che ha per « oggetti» le permutazioni di un certo numero di elementi (nel linguaggio corrente, sono i «cambiamenti di posto» di oggetti messi in fila, per esempio numeri di una successione finita), e per « operazione» l'esecuzione successiva di due permutazioni (dopo un primo cambiamento dei posti, ne eseguo un altro: il risultato complessivo può essere raggiunto con un unico cambiamento di posto).

Occorre però arrivare alla svolta del secolo, agli anni tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del nostro secolo, perché il concetto di struttura algebrica si chiarisca pienamente e diventi strumento di lavoro quotidiano del matematico. Una struttura algebrica è un aggregato, o « insieme », di elementi di natura imprecisata e del resto qualunque, che si possono comporre tra di loro (per solito due a due, ma in linea di principio anche tre a tre, quattro a quattro, ecc.), mediante operazioni anch'esse di natura non precisata, in modo da dare come risultato un altro elemento dello stesso insieme. Alle operazioni possono essere imposte delle proprietà formali, sul tipo della associatività, della commutatività (indipendenza del risultato dall'ordine di composizione), e così via. Non si tratta, in definitiva, di un concetto troppo difficile (beninteso, ora che è stato chiarito da un lungo lavoro); non è insomma « algebra» nel senso di astruseria incomprensibile, come vorrebbe il luogo comune.

Un esempio dovrebbe chiarire tale concetto. Se consideriamo le sole frazioni, positive e negative, cioè i numeri razionali relativi, oppure i numeri reali relativi, oppure i numeri complessi, noi possiamo elencare le seguenti proprietà formali comuni alle due operazioni di addizione e di moltiplicazione, definite in tutti e tre i casi:
sono operazioni associative e commutative;
vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla addizione;
esiste uno « zero », cioè un numero che addizionato ad ogni altro non lo altera, ed esiste un opposto per ogni numero, cioè un numero che sommato ad esso dà lo zero;
esiste un "uno", cioè un numero che moltiplicato per ogni altro non lo altera; ogni numero che non sia lo zero ha un Inverso, cioè un numero che moltiplicato per esso dà per risultato 1.
Ebbene: le proprietà elencate sono « formali », possono cioè essere imposte a due operazioni qualunque (chiamate solo convenzionalmente addizione e moltiplicazione) che agiscono su elementi di un insieme qualunque. Diremo che un insieme con due operazioni siffatte, verificanti le proprietà elencate, ha una struttura algebrica di campo.
Arriviamo così al concetto di campo, che è un'astrazione di livello più elevato dei numeri razionali, reali o complessi. Perché? Perché i numeri complessi, ad esempio, da questo nuovo punto di vista, divengono un caso particolare, un esempio o modello di campo; sono una concretizzazione del concetto astratto di campo, il quale a sua volta è una concretizzazione del concetto, ancora più astratto, di struttura algebrica.
L'unificazione dei concetti di « campo razionale », « campo reale », «campo complesso» nell'unico concetto, più astratto, di « campo », non presenta soltanto interesse teorico, ha una grande importanza pratica. L'astrazione è, in definitiva, un procedimento che permette di dominare un complesso di « concreti» sempre più vasto. Quanto più elevata l'astrazione, quanto più comprensivo di casi particolari determinati il concetto formale, tanto più potenti i risultati, tanto più varie le applicazioni. Il luogo comune secondo il quale le astrazioni sarebbero vuote e inutili, è radicalmente errato, almeno in algebra. Il fatto è che nel linguaggio comune troppo spesso si adoperano i termini «astratto », «astrazione» per indicare concetti imprecisi, arbitrari, parole più o meno vuote di significato. Al contrario, un'autentica astrazione, come il concetto di campo or ora illustrato, è piena zeppa di significati possibili, pur non avendo in sé un significato determinato. È uno schema estratto dal confronto di molti «concreti» (i razionali, i reali, i complessi), nel quale rientrano moltissimi altri concreti, anzi potenzialmente infiniti casi particolari. (Non possiamo, in questa breve rassegna, fornire altri esempi di «campi concreti », ci limitiamo ad asserire che ne esistono infiniti). Perciò, un teorema da noi dimostrato per un campo in generale è infinitamente più potente di un teorema relativo a un campo particolare, diciamo, ad esempio, al campo reale. Infatti, quest'ultimo teorema potrebbe magari essere una singolarità dell'oggetto particolare (per esempio, nel caso dei numeri reali, il fatto che una somma di quadrati non è mai negativa, cosa falsa nel campo dei complessi), mentre un teorema valido per un campo in generale è valido per ogni campo particolare; si moltiplica in tanti, in infiniti teoremi, che sono le sue « traduzioni» nei molti, negli infiniti modelli concreti del concetto astratto di campo.

Un esempio molto semplice a chiarimento di tale affermazione. Partendo dalle sole proprietà formali delle operazioni di un campo, con una breve catena di deduzioni, si dimostra facilmente che il prodotto di due elementi - chiamiamoli a e b - è zero, se, e solo se, almeno uno dei due elementi è zero. Ebbene: possiamo allora essere certi che questa proprietà, la nota legge di annullamento del prodotto, è valida in ogni possibile « campo» concretamente definito.
La potenza di questo livello di astrazione algebrica, del concetto cioè di « struttura algebrica », è un bell'esempio della potenza della definizione assiomatica. Il metodo assiomatico non è specifico dell'algebra; domina oggi infatti tutta la matematica. Si tratta di definire degli « enti », senza specificare la

natura degli elementi che li compongono, delle relazioni o operazioni che connettono tali elementi, ma limitandosi a imporre un certo numero di proprietà formali (assiomi) a tali relazioni o operazioni. È esattamente quello che abbiamo fatto per definire la struttura algebrica di campo. Avremmo potuto mettere, tra gli assiomi di un campo, anche la legge di annullamento del prodotto. Ma sarebbe stata un'aggiunta superflua, perché quella legge è deducibile dalle rimanenti proprietà.
Sorge cosi il problema di ridurre al minimo indispensabile gli assiomi che definiscono un dato ente, per esempio, un «campo», cioè di assicurarsi che essi sono « indipendenti», che nessuno di essi è un teorema dimostrabile a partire dagli altri.
Una volta compiuto questo lavoro, è molto naturale chiedersi che cosa vien fuori se si «lascia cadere », cioè se si omette, qualche assioma. Per esempio: i numeri interi relativi (positivi e negativi, più lo zero) non sono un modello di « campo» perché non vale per essi l'invertibilità degli elementi diversi da zero, con l'eccezione di + 1 e di - 1. (L'inverso di 1 è 1, e l'inverso di - 1 è - l; ma l'inverso, per esempio, di 2 è 1/2, e 1/2 è una frazione propria, non è un intero).
La « caduta» di questo assioma porta con sé la « caduta» di una dimostrazione formale della legge di annullamento del prodotto. Essa rimane valida per il caso particolare degli interi; esistono però strutture algebriche che hanno le proprietà formali elencate per gli interi, e nelle quali un prodotto può essere zero senza che sia zero nessuno dei due fattori. La cosa si vede bene, ad esempio, sul « calcolo dei resti» nella divisione per dodici (1).
Gli interi, le classi-resto nella divisione per dodici, e moltissimi altri enti matematici di primario interesse, non rientrano nel concetto di campo, bensì in quello di anello commutativo, che si ottiene da quello di campo lasciando «cadere» la richiesta di esistenza dell' 1 e con ciò di esistenza .dell'inverso per gli elementi diversi da zero (se si mantiene la richiesta che ci sia un «uno», si ottiene la sottoclasse, meno interessante, degli anelli commutativi con unità, alla quale appartengono gli interi e l'esempio sopra illustrato).
Naturalmente, quanti più assiomi faccio cadere, tanto più potente è il concetto astratto che ottengo. Il concetto di anello commutativo contiene in sé quello di « anello commutativo con unità », il quale a sua volta contiene in sé quello di campo. Il concetto di anello commutativo è poi racchiuso in quello di anello, che si ottiene rinunciando anche alla proprietà commutativa della moltiplicazione.
Occorre però dire che quel che si guadagna in ampiezza concettuale si perde in quantità di risultati. La legge di annullamento del prodotto è un teorema della teoria dei campi, non è invece un teorema della teoria - più generale - degli anelli, e neppure di quella - intermedia, per così dire - degli anelli commutativi.
C'è una specie di proporzionalità inversa tra la generalità di una teoria e la ricchezza dei suoi risultati. Si pone perciò all'algebrista il problema di fissare un grado di generalità « ottimale » per una teoria astratta, nella quale si vogliano incluse, come casi particolari, alcune strutture determinate, per esempio i numeri razionali, reali, complessi e interi. In quest'ultimo caso, la teoria dei campi è troppo ristretta, quella degli anelli troppo ampia; sarà bene ragionare su di un anello commutativo. (Sia detto tra parentesi: la scelta degli assiomi, che appare da un punto di vista logico-formale limitata solo dalla compatibilità logica delle richieste, è in verità, nello sviluppo storico del pensiero matematico, motivata o addirittura « imposta» da esigenze di contenuto, del tipo di quella or ora accennata).

Sempre partendo dal concetto di campo, possiamo però scegliere un'altra via, del tutto diversa dalla precedente, per costruire altri tipi di struttura algebrica. Possiamo fissare l'attenzione su di un'operazione soltanto, per esempio, sull'addizione, e mantenere solo gli assiomi relativi all'addizione, cioè le sole proprietà formali dell'addizione. Si viene cosi a definire una struttura algebrica importantissima, quella di gruppo commutativo, che si generalizza nella struttura di gruppo se si lascia cadere la proprietà commutativa.
Se si vuole dare una definizione generale dell' algebra astratta, si dovrà dire che essa è quel ramo della ricerca matematica che studia le strutture algebriche (insiemi con operazioni le quali verificano determinati assiomi). Se guardiamo lo sviluppo storico concreto dell'algebra astratta, possiamo però dire

che essa è composta essenzialmente da due parti: la teoria dei gruppi e la teoria degli anelli. Fino a questo momento.
Nuove strutture algebriche vengono fuori in modo «naturale» dalla ricerca matematica (in particolare geometrica, topologica, logica), in una qualche misura anche dalla ricerca fisica e sperimentale. Cosi, hanno avuto grande sviluppo la teoria degli anelli non associativi (si lascia «cadere» anche la legge associativa del prodotto), o la teoria dei semigruppi (si conserva solo la legge associativa dell'unica operazione in gioco in un gruppo). Si tratta, tuttavia, di ampliamenti delle teorie ormai classiche dei gruppi e degli anelli. Si studiano oggi però anche strutture di tutt'altro tipo, per esempio dotate di un'operazione «ternaria» (nella addizione e nella moltiplicazione, anche astratte, si « compongono» due elementi, l'operazione è quindi binaria; si ha invece un'operazione ternaria quando a ogni terna ordinata di elementi è associato un elemento come risultato della composizione tre a tre) Lasciamo da parte la teoria dei reticoli, che deriva dalla algebrizzazione della logica iniziata dal Boole nella metà dell'Ottocento. Si tratta di una teoria molto ricca di applicazioni, non solo alla logica, ma che tuttavia è coltivata soprattutto dai logici-matematici. Tale teoria si potrebbe forse aggiungere a quelle dei gruppi e degli anelli come terza componente fondamentale dell'algebra astratta, nel suo sviluppo concreto attuale.
Parlando del livello raggiunto dall'astrazione algebrica, non si può fare a meno di soffermarsi sul concetto, fondamentale, di isomorfismo tra due strutture algebriche assegnate in modo determinato, per esempio tra due gruppi « concreti ». Ciò significa che l'un gruppo si ottiene dall' altro con un opportuno cambiamento di nome degli elementi. Per essere rigorosi, due gruppi si dicono isomorfi quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'uno quelli dell' altro in modo tale che il corrispondente del composto coincida col composto dei corrispondenti (si ottiene cioè lo stesso risultato se prima si compongono gli elementi nel gruppo di partenza e poi si passa al corrispondente del risultato ottenuto nel gruppo di arrivo, oppure se prima si passa ai corrispondenti degli elementi del gruppo di partenza e poi si esegue la loro composizione nel gruppo di arrivo).

Certo, così è detto in modo ben più rigoroso, ma assai meno comprensibile. È meglio ritornare all'idea di due gruppi che differiscono solo per i « nomi» degli elementi e delle operazioni, solo per i « contenuti », ma non per la «forma », che quindi possono essere portati a «combaciare» perfettamente, quando si « traducono» opportunamente i nomi. Un esempio a chiarimento.
Gli elementi 1 e -l formano un gruppo rispetto all' ordinaria moltiplicazione; 1 x 1 è 1, - 1 x -1 è del pari 1, 1 x -1 è - 1. «Pari» ,e «dispari» sono pure i due elementi di un gruppo rispetto all' addizione ordinaria; pari più pari è pari, dispari più dispari è anche pari, mentre pari più dispari è dispari. Se si «traduce» 1 con « pari» e -l con « dispari », e si sostituisce alla moltiplicazione l'addizione, i due gruppi si sovrappongono: hanno la « stessa forma ».
Nell'algebra astratta, strutture algebriche isomorfe vengono considerate uguali, vengono identificate. Quello che conta è lo « schema formale », non il suo contenuto; quello che conta è la « struttura operatoria », non i nomi degli oggetti e delle leggi di composizione.
Il concetto di isomorfismo può essere risultato difficile, o addirittura incomprensibile, in questa breve spiegazione. In verità, esso è. accessibile anche a un ragazzo di undici - dodici anni, come dimostrano le esperienze di insegnamento matematico « nuovo» in corso in tutto il mondo. Il concetto di isomorfismo non è solo importante come tecnica algebrica, ma anche come idea generale. Per esempio, la corrispondenza tra « natura» e « conoscenza della natura », o « scienza », non mi sembra un « adeguamento dell'intelletto alla cosa », ma piuttosto un «isomorfismo» tra processo naturale e sua rappresentazione intellettuale.
Nuovi livelli di astrazione si cominciano a vedere nella teoria delle categorie, che tende a unificare teorie relative a strutture matematiche astratte tra di loro diverse, e nell'algebra universale, che si propone di ottenere risultati validi per strutture algebriche quali si vogliano. Di conseguenza, c'è da attendersi che l'attuale astrazione algebrica diventi rapidamente patrimonio culturale elementare, così come è accaduto per l'algebra che oggi chiamiamo classica, e che a suo tempo sembrava « aristocratica» e « sublime ».

Il PEDAGOGO

L'elogio del gioco

Lucio Lombardo Radice, ***Il giocattolo più grande***, Giunti Marzocco, Firenze, 1979

<<**Q**uesta pagina finale è scritta non per chi gioca, ma piuttosto per chi, tradizionalmente, non gioca: le madri, i padri, i nonni, le zie e gli zii, i fratelli e le sorelle maggiori, le maestre, i professori…

Cari amici e colleghi, se avete un atteggiamento di "sufficienza" rispetto al gioco, se contrapponete "per gioco" e "sul serio", riflettete un poco, vi prego, su questo mio **elogio del gioco**.

Una delle minacce più gravi che incombe sulla nostra <u>civiltà occidentale</u> , anzi uno dei fenomeni che già la corrode e la guasta, è il *consumismo*, è la *passività*., e la *non partecipazione*. Viviamo in una società troppo ricca, ma malamente ricca, che fa tutto lei, che ti fa trovare tutto bello o pronto e impacchettato: i giochi colle loro regole prestabilite, gli spettacoli sempre e soltanto da vedere, le trasmissioni della TV preparate da altri, i viaggi organizzati, le partite di scacchi tra Karpov e Korchnoj da rifare sulla base delle tabelle che trovi sui settimanali, la musica da ascoltare, i film da guardare…

Viviamo una società che non ci chiede di inventare, che non ci stimola a creare. Viviamo in una società nella quale c'è ben poco spazio per **giocare**.

Recuperiamo la gioia, il gusto, di suonare (male), di dipingere (peggio), di recitare (da cani), di fare film (pessimi)… ma di suonare, dipingere, recitare, fare film ***noi***. Ebbene, il gioco intelligente collettivo è una delle forme più semplici, e secondo me più efficaci, per recuperare la creatività nella passiva e passivizzante società dei consumi.

Ma ci sono molte altre ragioni di elogio del gioco.

La *cultura di base*, quella senza la quale si è un pover'uomo, è fatta anche di una serie di regole, nozioni, nomi che è molto noioso imparare sui libri o sui banchi di scuola. Parlo delle regole dell'ortografia, di certe abilità di calcolo mentale, dei nomi degli Stati e delle loro capitali, di fiumi e laghi e località varie. Ebbene: sciarade figurate, gioco dello 'spelling', gioco degli uomini celebri, cruciverba una lettera per uno, sono, tra l'altro, eccezionali esercizi di ortografia (di nomi italiani e anche stranieri); "fiori, frutta e città" è un ottimo controllo di nozioni acquisite; la camicia, ancora gli uomini celebri, il gioco dei matti sono un modo semplice e divertente per ampliare le conoscenze, e con ciò se pure indirettamente, la propria cultura; il gioco dei sì e dei no impone una sistematicità logica; alcune varianti del "gioco di Carlotta" sono un ottimo esercizio per fare divisioni a mente.

Domanda (molto seria, vi prego di credere, cari colleghi insegnanti): ma perché qualche volta, per controllare quello che vostri allievi hanno imparato, non fate in classe un'ora di palestra di giochi intelligenti, invece di interrogare?

Imparare a giocare, stabilendo e rispettando regole oneste, crea l'abitudine a una *convivenza civile* molto più che non lunghe prediche di "educazione civica".

Il gioco a squadre "socializza", insegna ad aiutare e a *rispettare* i più piccoli e i più deboli, a *bilanciare* equamente le forze. I giochi che proponiamo sono anche un mezzo, non facilmente sostituibile, per il "**recupero**" dello stare gioioso tra grandi e piccoli, tra genitori e figli, tra maestri e allievi.

Giocare bene significa avere gusto per la precisione, amore per la lingua, capacità di esprimersi con linguaggi non verbali; significa acquisire insieme intuizione e razionalità, abitudine alla lealtà e alla collaborazione. Ho cominciato a scrivere questo libro per spasso, ma, via via che andavo avanti, pur continuando a divertirmi, mi rendevo conto sempre più chiaramente che stavo scrivendo un libro serio. Forse il più serio di tutti quelli che ho scritto.>>

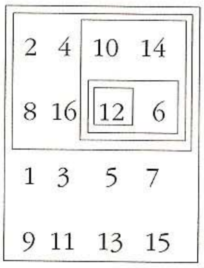
I Logici sistematici: INDOVINARE DAI "SÌ" E DAI "NO"

Facciamo la conta per chi esce; poi pensiamo una cosa qualunque; poi lui torna; fa una domanda per uno ogni giro... "Ma questo gioco lo sappiamo già da piccoletti, è il gioco di indovinare!"
Sì e no. Sì e no, perché in questo *mio* gioco occorre indovinare soltanto dai "sì" e dai "no". [...]

Per Indovinare attraverso i "Si" e i "No" bisogna procedere in modo logico e sistematico.
Facciamo subito un esempio che chiarisce il *metodo* da seguire.
Pensate un numero tra 1 e 16 (compreso).
In quattro domande io sono *sicuro* di indovinarlo, dalle vostre risposte che saranno soltanto "sì" e "no".
Prima domanda: *è un numero dispari?*
Risposta: *no.*
Allora è un numero pari, restano solo 8 dei 16 numeri.

[...]

Se il numero pensato era 12, io con il mio sistema lo ho 'stretto' così:



Il metodo è quindi quello di cominciare dalla classe più generale, e costruire via via sottoclassi 'inscatolate' l'una nell'altra, restringendo via via le possibilità. Poiché ogni classe si divide in una sottoclasse "sì" - quella degli elementi che godono della proprietà che metto in questione - e in una sottoclasse "no" - quella degli elementi che non ne godono.
Le due sottoclassi sono 'complementari', perché, messe insieme, costituiscono l'intera classe di partenza, e nessun elemento può essere contemporaneamente in tutte e due le sottoclassi. [...]

"Aspetta, fermo un momento, ma questo ce lo spiegava già la maestra alle elementari, quando si faceva... sì hai capito... la 'insiemistica'..."
Lasciamo perdere, per piacere, le parole difficili. Oltre tutto 'insiemistica' non è neppure buon italiano, è molto meglio dire 'teoria degli insiemi' o 'algebra delle classi'. Ma è *molto molto* meglio dire semplicemente: *procedimento di classificazione per successive esclusioni.* In fondo è il procedimento che è stato seguito dal grande Linneo per classificare le piante, e poi gli animali: in Famiglie, Classi, Specie, Razze... E' una delle (non poche) cose utili che di solito non si insegnano a scuola; noi la scopriamo qui per aumentare la nostra probabilità di indovinare al gioco dei "sì" e dei "no".

I Calcolatori elettronici: "contare" ossia "il gioco di Carlotta"

"Il ballo (all'aperto) non era ancora giunto alla fine, quando i fulmini, che già da tempo avevamo visto lampeggiare all'orizzonte... cominciarono a diventare molto più forti e il tuono sovrastò la musica... La padrona di casa ebbe la buona idea di indicarci una stanza che aveva imposte e tende [per riparo dal maltempo].
Ci eravamo appena arrivati, quando Lotte [Carlotta] si diede da fare per sistemare un circolo di sedie, e quando la comitiva, su sua preghiera si fu messa a sedere... disse: <<Noi giochiamo a 'contare'. Attenzione! Io giro attorno al circolo da destra a sinistra, e via via, voi fate la conta all'ingiro, ognuno dice il numero che gli tocca, e la cosa deve andare svelta come il lampo: chi si inceppa, oppure si sbaglia, becca uno schiaffo, e così si va avanti fino a mille>>".

[...]
Attenzione ai commenti, potreste fare delle brutte figure.
Perché, se dite, come state per dire: "scusa tanto, mi sembra un gioco un po' cretino", voi date della cretina non solo e non tanto a Carlotta - la quale secondo me, un gran genio non era - ma al sommo scrittore che ha raccontato la triste, tragica storia dell'amore per lei del giovane Werther, cioè a Volfango Goethe.

[...]

Il grande Volfango, che era un virtuoso del 'giocattolo più grande', non disdegnava di impiegarlo per giocare, e per organizzare giochi, soprattutto tra i colti borghesi e i nobili 'illuminati' del piccolo principato di Weimar, del quale era ministro (allora la Germania era divisa in una gran quantità di Stati e staterelli). Nei circoli dell'"illuminismo" tedesco, le scienze naturali erano assai di moda, la matematica però - così almeno sembrerebbe - molto meno, e quindi la Carlotta proponeva ai suoi amici un gioco aritmetico assai elementare per non dire un po' cretino.

"Perché, allora, lo hai messo nel tuo libro?"
Per due motivi. Il primo, quasi inconfessabile, è che ci tengo a ricordare ai miei colleghi professori che anche un uomo come Goethe i giochi di società li faceva volentieri, e che quindi non mi possono guardare ironicamente dall'alto al basso se anche io mi ci dedico. Il secondo motivo è invece assai serio, ed è questo: per il 'gioco di Carlotta' potete inventare un numero quasi infinito di varianti, tutt'altro che sciocche, e alle volte tanto difficili, che il buon Werther si sarebbe beccato gli schiaffetti-carezze di Carlotta sbagliando sul serio, e non apposta.
Le infinite varianti che ci possiamo inventare sono fondate su di un medesimo schema, che può assumere infiniti contenuti: *contare saltando i numeri che...*
Invece dei puntini, potremmo mettere:
1) *Che non sono divisibili per tre.* Allora bisognerà dire rapidamente: 1, 2, 4, 5, 7, 8... e se Werther dice 9 invece che 10, schiaffetto o meglio schiaffone di chi dirige il gioco.

[...]

6) *Contare, saltando tutti i numeri primi.*
I numeri primi sono quei numeri (interi naturali, ma lo abbiamo sempre sottinteso) che ammettono esattamente due divisori:
1) Se stessi
2) L'unità 1.
(*Ogni* numero ha almeno questi due divisori).
Quindi, attenzione, 1 non è un numero primo (ha solo un divisore, se stesso).
2 è un numero primo, ed è l'unico numero primo *pari.* Infatti un numero pari che non sia 2, ha almeno *tre* divisori: se stesso, 2, 1. Il grande Gauss, mi pare che ne abbiamo già parlato, quando voleva riposarsi (*sic*, riposarsi) si andava a calcolare i numeri primi che stanno dentro un migliaio, e perciò via via, nella sua lunga vita, ne scrisse un bel poco, fino non so a quante decine di migliaia. Ma non trovò una regola nella successione dei numeri primi, che è infinita, e che è ancora una delle faccende più misteriose della aritmetica.
Siccome è estremamente improbabile che voi siate una comitiva di piccoli Gauss, e anzi che ci sia anche un solo piccolo Gauss tra di voi, penso che potrete fermarvi non che al primo migliaio, al primo centinaio. Del resto il gioco di Carlotta è divertente a due condizioni:

Primo. Che non ci sia nessun intervallo tra un numero e l'altro, che ognuno debba parlare *immediatamente dopo chi lo precede.*
Secondo. Che ci si fermi al più a 100, a 120. Dopo, diventa anche difficile per la Carlotta o il Carlo, per chi dirige il gioco al centro del circolo, controllare gli errori. Anche se è un professore di matematica.