a.s. 2007-2008 Percorso di Matematica

Da Pitagora a Fermat

Docenti
Patrizia Cassieri, Nicoletta Allegretti

Studenti
Agnes, Caracciolo, De Simone, Grignaschi, Horn, Minzolini

Da PITAGORA A FERMAT

1. Introduzione
2. Pitagora di Samo
3. Il teorema di Pitagora tra storia e leggenda
4. Le dimostrazioni del teorema
5. Le estensioni del teorema
6. Terne pitagoriche
7. L'Ultimo teorema di Fermat
8. Ogni nuova soluzione è un nuovo problema

1. Introduzione

Il teorema, che oggi conosciamo come il teorema di Pitagora, era già noto prima di Pitagora, ma egli ne fornì una dimostrazione. La ricerca di una dimostrazione matematica è la ricerca di una conoscenza che è più assoluta della conoscenza accumulata da ogni altra disciplina. Il desiderio di una verità ottenuta attraverso il metodo della dimostrazione è ciò che ha guidato i matematici negli ultimi duemilacinquecento anni.
Nella semplice enunciazione di Pitagora "In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti", è noto anche agli studenti più giovani. Ma nonostante questa semplicità, il teorema di Pitagora fornì l'ispirazione per un problema che ha frustrato le più grandi menti matematiche: **l'Ultimo teorema di Fermat**

2. Pitagora di Samo

Nel sesto secolo a. C., Pitagora di Samo fu una delle figure più autorevoli e misteriose della matematica. Poiché non esistono resoconti di prima mano della sua vita e della sua opera, la sua figura è avvolta nel mito e nella leggenda e ciò rende difficile per gli storici separare la realtà dall'immaginazione. Quello che sembra certo è che Pitagora sviluppò l'idea della logica numerica della prima età aurea della matematica. Pitagora capì che i numeri esistono indipendentemente dal mondo sensibile e che perciò il loro studio non è soggetto alle imprecisioni della percezione. Questo significa che egli poté scoprire verità indipendenti dall'opinione e dal pregiudizio e che erano più assolute di ogni precedente conoscenza. Pitagora acquisì le sue abilità matematiche viaggiando nel mondo allora conosciuto. Egli raccolse molte tecniche e strumenti matematici dagli egiziani e dai babilonesi. Questi due popoli erano capaci di eseguire calcoli complicati che permisero loro di elaborare sofisticati sistemi di numerazione e di costruire complessi edifici. Per queste civiltà era importante solo che il calcolo funzionasse; perché funzionassero era una questione che esse non prendevano in considerazione. Dopo venti anni di viaggi, nel corso dei quali aveva assimilato tutte le regole matematiche allora note, Pitagora fece ritorno a Samo con l'intenzione di fondare una scuola. Ma durante la sua assenza il tiranno Policrate aveva trasformato la società da liberale a conservatrice e intollerante. Policrate lo invitò a corte, ma Pitagora rifiutò e si ritirò in una spelonca, lontano dalla città. Stabilì temporaneamente una scuola nota come il Semicerchio di Pitagora, ma le sue idee di riforma sociale erano inaccettabili ed egli fu costretto a lasciare l'isola. Si stabilì a Crotone dove trovò Milone, l'uomo più ricco e possente della città, di dimensioni erculee. Milone, che apprezzava e praticava anche la filosofia e la matematica, mise a disposizione di Pitagora parte della propria casa. Pitagora fondò il Sodalizio pitagorico, un gruppo di seicento seguaci, uomini ma anche donne, in grado di capire i suoi insegnamenti e di contribuire alla dottrina pitagorica elaborando nuove idee e nuove dimostrazioni. Subito dopo aver fondato il Sodalizio, Pitagora coniò la parola filosofo e, così facendo, definì gli scopi della sua scuola: <<…*Alcuni [uomini] sono influenzati dall'amore per la ricchezza mentre altri sono ciecamente condotti dal folle desiderio di potere e di dominio, ma l'uomo migliore si dedica a scoprire il significato e lo scopo della vita stessa. Egli cerca di scoprire i segreti della natura. È questo l'uomo che io chiamo* ***filosofo*** *perché, sebbene nessun uomo sia completamente saggio sotto ogni rispetto, egli può amare la sapienza in quanto chiave di accesso ai segreti della natura.*>>

Anche se molti erano consapevoli delle aspirazioni di Pitagora, nessuno fuori del Sodalizio conosceva i dettagli dei loro studi. Ogni membro del Sodalizio era costretto a giurare di non rivelare all'esterno le loro scoperte matematiche, anche dopo la morte di Pitagora stesso. Il carattere segreto del Sodalizio è una delle ragioni del fiorire di leggende sugli strani riti che i pitagorici avrebbero praticato ed è anche la causa della scarsità di fonti attendibili sulle loro scoperte. Certo è che il Sodalizio era effettivamente una comunità religiosa e uno degli idoli adorati era il Numero. Comprendendo i rapporti tra i numeri, i pitagorici credevano di poter scoprire i segreti spirituali dell'universo e di avvicinarsi agli dei. Pitagora era anche attratto dal nesso tra i numeri e la natura. Egli capì che i fenomeni naturali sono governati da leggi che queste leggi possono essere descritte con formule matematiche. Uno dei primi nessi da lui scoperti fu la relazione fondamentale tra l'armonia musicale e l'armonia dei numeri.

Di tutte le relazioni fra i numeri e la natura scoperti dai pitagorici il più importante fu il teorema che reca il nome del fondatore della scuola. Il teorema di Pitagora offre una relazione valida per tutti i triangoli rettangoli e che perciò definisce anche lo stesso angolo retto. A sua volta l'angolo retto definisce la perpendicolare, ossia la relazione tra le dimensioni. La matematica, attraverso l'angolo retto, definisce proprio la struttura dello spazio nel quale viviamo.

3. Il teorema di Pitagora tra storia e leggenda

La storia del teorema di Pitagora testimonia sia la nascita della matematica come scienza sia la vitalità delle idee matematiche nelle loro successive trasformazioni. Già i **Babilonesi**, 2000 anni prima di Cristo e 1500 prima di Pitagora, ne conoscevano l'enunciato., ma la prima dimostrazione pervenutaci è negli *Elementi* di Euclide, del 300 a. C.

TAVOLETTA PLIMPTON

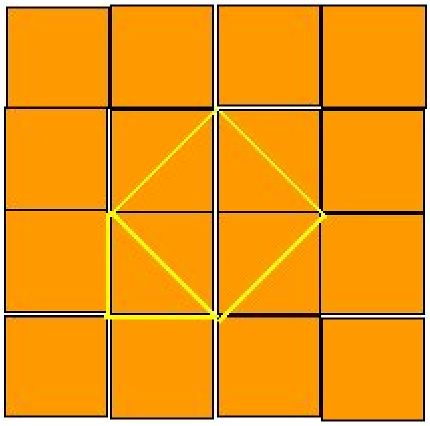
Delle centinaia di migliaia di tavolette di argilla ***Babilonesi*** *rinvenute dall'inizio del XIX secolo diverse migliaia hanno argomento matematico. Uno dei più famosi esempi di matematica Babilonese è la tavoletta chiamata* ***Plimpton 322*** *che prende il nome dalla collezione di G.A. Plimpton alla Columbia University. Si ritiene che la tavoletta sia stata scritta nel 1800 a.C. circa, contiene numeri in scrittura cuneiforme disposti in tabella di quattro colonne per 15 righe.* ***La tabella è una lista di triplette pitagoriche i cui numeri sono le soluzioni del teorema di Pitagora,*** $a^2 + b^2 = c^2$***, per esempio, (3,4,5).***

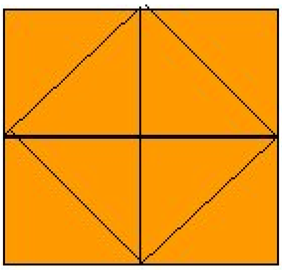
Plimpton 322 è una tavoletta di argilla, parzialmente scheggiata, larga circa 13 cm, alta 9 cm e di 2 cm di spessore. L'editore newyorkese George A. Plimpton comprò la tavoletta da un antiquario, Edgar J.

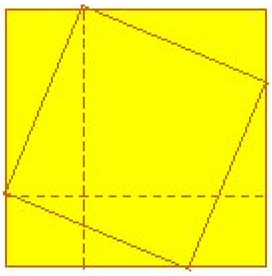
Banks, nel 1922 circa e la lasciò in eredità, con tutta la sua collezione, alla Columbia University a metà degli anni '30. Secondo Banks, la tavoletta viene da Senkereh, un sito nel sud dell'Iraq corrispondente all'antica città di Larsa. Si ritiene che la tavoletta sia stata scritta intorno al 1800 a.C., basandosi in parte sullo stile della scrittura cuneiforme: Robson (2002) scrive che la calligrafia "è tipica dei documenti del sud dell'Iraq di 4000-3500 anni fa." Più precisamente, basandosi sulle similarità con altre tavolette da Larsa che contengono esplicitamente date nel testo, Plimpton 322 può essere datata al periodo 1822-1784 a.C

La prima, e più classica, applicazione del teorema di Pitagora fu il calcolo della lunghezza della diagonale di un quadrato, che è la famosa radice quadrata di 2. I pitagorici dimostrarono poi che essa è irrazionale, ossia che non esistono due interi x e y tali che $x^2 = 2y^2$. Chi si fosse dimenticato la dimostrazione può rinfrescarsi la memoria, considerando l'esponente di 2 nella decomposizione in fattori primi dei due membri. Esso è pari in x^2, perché qualunque sia in x, viene raddoppiato nel quadrato. Ma è dispari in $2y^2$, perché oltre a un quadrato c'è un 2 in più. I due membri non possono quindi essere uguali. La visione pitagorica fu messa in crisi da questa scoperta: l'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato mostrava infatti l'impossibilità di ridurre a un numero razionale una semplice parte della natura. E la scoperta fu tanto traumatica che la sua rivelazione pubblica da parte di Ippaso di Metaponto gli procurò la radiazione dall'ordine.

Si racconta, ma è **leggenda**, che Pitagora abbia scoperto il suo teorema mentre stava aspettando di essere ricevuto da Policrate. Seduto in un grande salone del palazzo del tiranno di Samo, Pitagora si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento. Se avesse tagliato in due una piastrella lungo una diagonale, avrebbe ottenuto due triangoli rettangoli uguali. Inoltre l'area del quadrato costruito sulla diagonale di uno dei due triangoli rettangoli risultava il doppio dell'area di una piastrella. Questo quadrato risultava infatti composto da quattro mezze piastrelle, cioè da due piastrelle. Ma i quadrati costruiti sugli altri lati del triangolo corrispondevano ognuno all'area di una piastrella. In altre parole il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti. Questo risultava evidente nel caso della piastrella quadrata, cioè di un triangolo rettangolo isoscele: Ma poteva essere vero, si chiese Pitagora, anche nel caso generale, con cateti di lunghezza diversa?

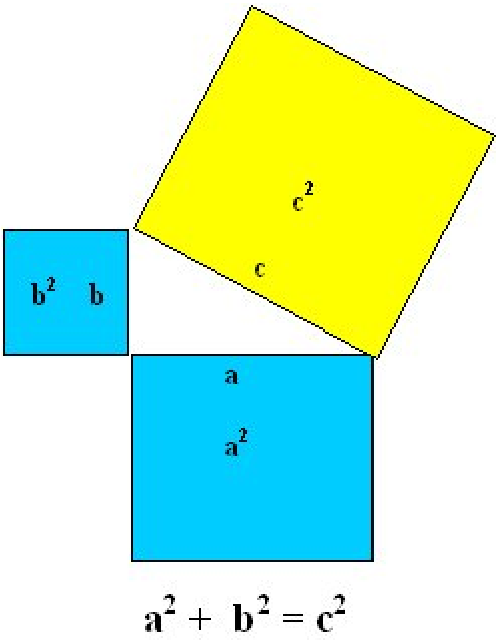






Studiando meglio la figura ottenuta dall'osservazione delle piastrelle, Pitagora si accorse che il quadrato formato da quattro piastrelle si poteva scomporre in quattro triangoli rettangoli equivalenti e in un quadrato il cui lato era uguale alla lunghezza dell'ipotenusa di uno dei triangoli. Non fu quindi difficile passare al caso generale di quattro triangoli rettangoli qualsiasi, non più isosceli per i quali, come vedremo, vale ancora il teorema.

In realtà la **storia** del teorema è molto più complessa e le sue origini, come abbiamo già detto, risalgono almeno ad un migliaio di anni prima che Pitagora si dedicasse allo studio dei triangoli rettangoli. Per avviare la nostra indagine sul teorema partiamo dalla formulazione che ne diede Euclide:



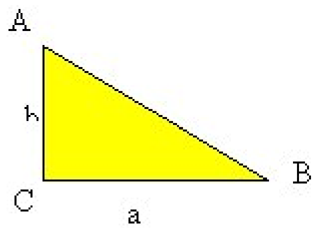
In ogni triangolo rettangolo il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale ai quadrati dei lati che contengono l'angolo retto.

Se lo riscriviamo in termini più moderni abbiamo l'enunciato riportato generalmente nei testi scolastici:

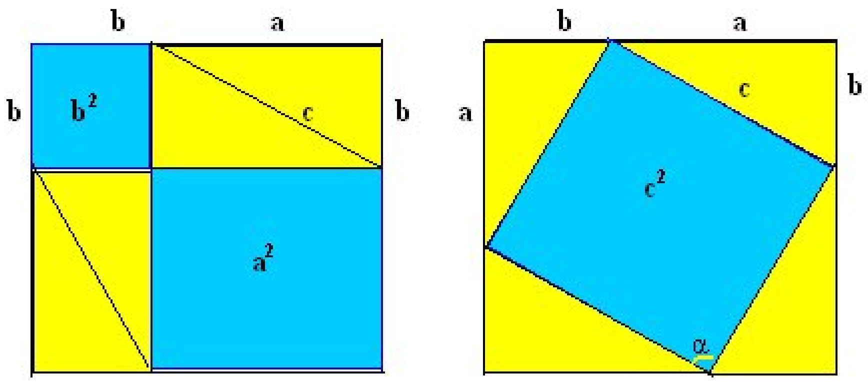
In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa (oppure: l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa) è equivalente alla somma dei quadrati dei due cateti (oppure: alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti).

Se c indica la lunghezza dell'ipotenusa e a e b quelle dei due cateti possiamo scrivere il teorema in forma algebrica: $a^2 + b^2 = c^2$

4. Le dimostrazioni del teorema



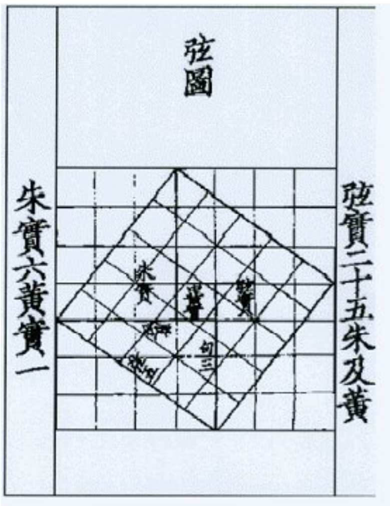
Vediamo una delle dimostrazioni più semplici, quella che generalmente si trova sui testi scolastici e che riprende il ragionamento che Pitagora potrebbe aver fatto osservando le piastrelle quadrate nel palazzo di Policrate. Dato il triangolo rettangolo ABC di cateti a, b e ipotenusa c, costruiamo due quadrati equivalenti, che abbiano come lato la somma dei due cateti, $a + b$.



Scomponiamo il primo di questi quadrati nei due quadrati costruiti sui cateti e nei quattro triangoli di figura, equivalenti al triangolo dato. Scomponiamo poi il secondo quadrato nel quadrato costruito sull'ipotenusa e negli stessi quattro triangoli. Se ai due quadrati grandi togliamo i quattro triangoli uguali, otteniamo due parti equivalenti, con la stessa area: i quadrati costruiti sui cateti e il quadrato costruito sull'ipotenusa.

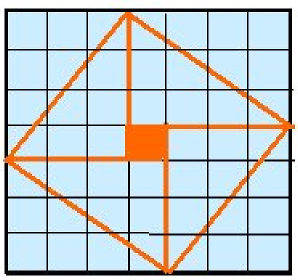
Attenzione però: la dimostrazione non è ancora completa. E' necessario dimostrare ancora che le parti più scure sono realmente i quadrati dei cateti e dell'ipotenusa del triangolo dato. Per il primo quadrato a sinistra questo è evidente, dal modo in cui abbiamo eseguito la scomposizione, cioè, come si dice, *per costruzione*. Per il secondo quadrato a destra, sempre per costruzione, possiamo dire che i suoi lati sono uguali all'ipotenusa del triangolo. Resta da dimostrare che i suoi angoli sono retti. Consideriamo l'angolo α, che sommato agli altri due angoli aventi lo stesso vertice forma un angolo piatto. Ma anche la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto, e quindi l'angolo α corrisponde al terzo angolo del triangolo, che è retto. Allo stesso modo si dimostra che anche gli altri angoli sono retti e quindi che la figura è un quadrato.

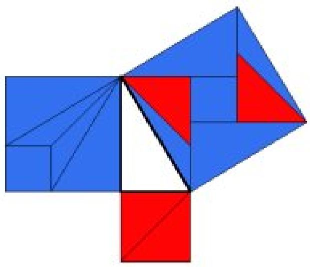
Il teorema kou ku o "di Pitagora" in un'illustrazione originale del Chou Pei



Molte dimostrazioni si basano semplicemente sulla scomposizione di aree in parti uguali. Una di queste potrebbe provare che anche in **Cina** il teorema "di Pitagora" era già noto almeno mille anni prima della nascita di Pitagora. E' collegata a una figura, che si trova nel *Chou Pei Suan Ching* uno dei più antichi testi cinesi di matematica, *Il libro classico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo*, scritto al tempo della dinastia Shang, 1500 - 1000 a. C.. Questa figura potrebbe essere una dimostrazione del teorema di Pitagora, chiamato dai cinesi *kou ku*. Nel disegno si vede infatti un triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 e un quadrato grande di lato 7 = 3 + 4.

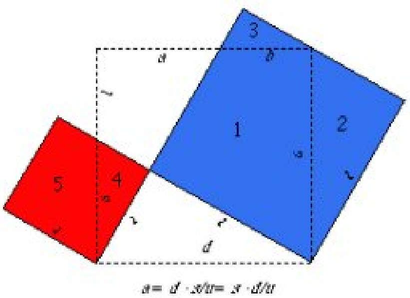
Schema del disegno del Chou Pei (a sinistra) e dimostrazioni del teorema di Pitagora di Liu Hui, nella ricostruzione di D. B. Wagner, studioso danese dell'Antica Cina (in alto a sinistra) e in quella di Jöran Friberg, un matematico svedese (in basso).

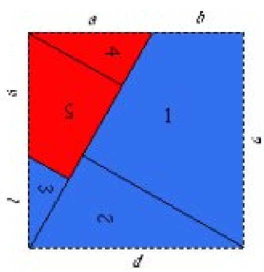




Sempre in Cina Liu Hui, un grande matematico del terzo secolo d. C., diede una dimostrazione del teorema "di Pitagora" che è stata ricostruita da alcuni matematici moderni seguendo le indicazioni che è stato possibile ricuperare. Dice Liu Hui:

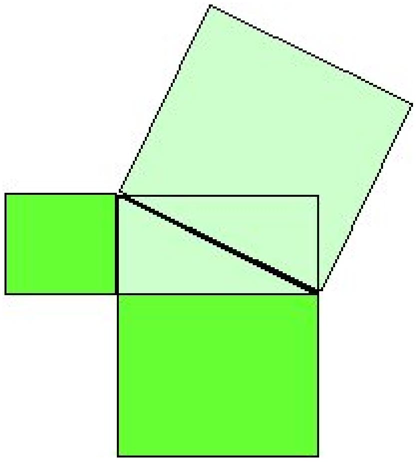
Siano il quadrato su kou [il cateto a] *rosso e il quadrato su ku* [il cateto b] *blu. Usate il principio della mutua sottrazione e addizione di specie simili per inserire i resti, in modo che non ci sia alcun cambiamento nell'area con l'aspetto di un quadrato sull'ipotenusa.*





Le dimostrazioni riportate in figura sono graficamente molto belle e non hanno bisogno di spiegazioni. Risultano infatti evidenti le parti equivalenti in cui sono state scomposte le figure.

Il teorema di Pitagora secondo Sulbasutra



Anche dall'**India** arriva un enunciato del teorema di Pitagora che ci autorizza a pensare come il teorema fosse già noto agli indiani in epoche precedenti alla nascita di Pitagora. Si legge infatti nei *Sulbasutra*, i testi che contenevano le istruzioni per la costruzione degli altari, riportati in forma scritta fra l'800 e il 600 a. C.:

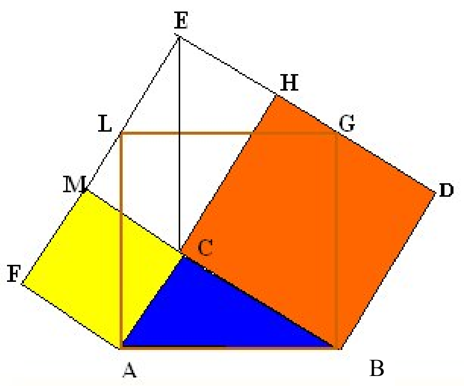
La fune tesa per la lunghezza della diagonale di un rettangolo forma un'area pari alla somma di quella formata dal lato verticale e da quello orizzontale.

Si parla ancora di funi e di problemi pratici. Ma la strada è aperta verso la matematica astratta.

La dimostrazione araba di Thabit ibn Qurra

Dall'Arabia arriva invece la dimostrazione di Thabit ibn Qurra Marwan al'Harrani (826 - 901).

I triangoli ABC, CEH, CEM, BGD, EGL, AFL sono tutti congruenti, quindi equivalenti. Chiamiamo Ω la loro area. Il poligono ABDEF, di area Σ può essere scomposto in due modi



ABDEF = Quadrato di lato AC +Quadrato di lato BC + Triangolo(ABC) + Triangolo(CEH) + Triangolo(CEM)

ABDEF = quadrato di lato AB + Triangolo(BGD) +Triangolo(EGL) + Triangolo (AFL).

In formule $\Sigma = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 3\Omega$ e $\Sigma = \overline{AB}^2 + 3\Omega$.

Dall'uguaglianza delle due relazioni e dall'equivalenza dei triangoli indicati, ricaviamo: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

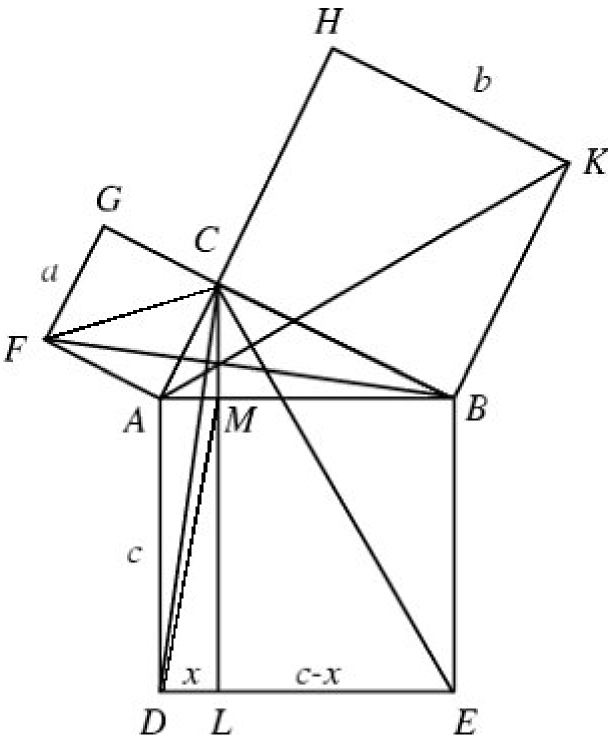
La sedia della sposa di Euclide.

Ma la dimostrazione per eccellenza per i matematici è sicuramente quella di Euclide, riportata nel primo libro degli **Elementi**, proposizione 47: *Nei triangoli retti il quadrato del lato che sottende l'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che contengono l'angolo retto.*

Questa dimostrazione fa riferimento a una figura che è stata battezzata, per la sua forma particolare, *mulino a vento*, *coda di pavone* o *sedia della sposa*. Vediamola nei termini usuali per uno studente, come la ritrova sul suo libro di geometria, nel capitolo dedicato ai teoremi di Euclide.

Euclide, 325-265 a.C. circa. Ritratto da A, Thevet, Vite di uomini illustri, Parigi, 1584.

Dato il triangolo rettangolo ABC, costruiamo i quadrati sui suoi lati e tracciamo CL parallelo ad AD. I triangoli FAB e CAD sono congruenti per il primo criterio di congruenza. Hanno infatti AB $\cong$ AD perché lati dello stesso quadrato ABDE,



inoltre AF $\cong$ AC, perché lati dello stesso quadrato ACGF e gli angoli FAB e CAD sono congruenti perché somma di un angolo retto e di un angolo in comune, l'angolo CAB.

Abbiamo perciò: $FAB \cong CAD$

Inoltre i triangoli CAD e AMD hanno la stessa base AD e la stessa altezza AM, e sono quindi equivalenti:

e le loro aree sono uguali $areaCAD = areaAMD$

e quindi $2 \cdot areaCAD = 2 \cdot areaAMD = areaADLM$

D'altra parte i triangoli FAB e FAC hanno anch'essi la stessa base AF e la stessa altezza AC, quindi sono equivalenti: $areaFAB = areaFAC$ e $2 \cdot areaFAC = areaACGF$

Il rettangolo ADLM è perciò equivalente al quadrato ACGF.

Allo stesso modo dimostriamo che il quadrato BKHC è equivalente al doppio del triangolo ABK e quest'ultimo a sua volta è equivalente al doppio del triangolo BCE, cioè al rettangolo BMLE:
$areaBKHC = 2 \cdot areaABK = 2 \cdot areaBCE = areaBMLE$
Se sommiamo le due equivalenze abbiamo: $areaACGF + areaBKHC = a^2 + b^2 = areaADLM = c^2$
Abbiamo così dimostrato che $a^2 + b^2 = c^2$.

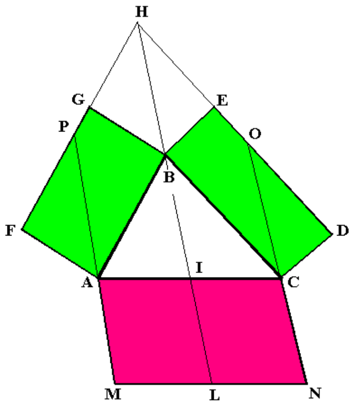
NOTA

Tra le assunzioni necessarie per la validità del teorema di Pitagora c'è il V postulato, che interviene direttamente nella dimostrazione di Euclide. Sena questo postulato, dunque, il teorema di Pitagora non solo non si può dimostrare, ma non si può neanche enunciare nella versione geometrica. Si potrebbe pensare di aggirare la questione enunciandolo in versione algebrica, riferendosi cioè alla proporzioni. Ma anche questa volta il V postulato non solo permette di dimostrare il teorema di Pitagora, ma è equivalente ad esso.

Il teorema di Pitagora è dunque una caratteristica della geometria euclidea.

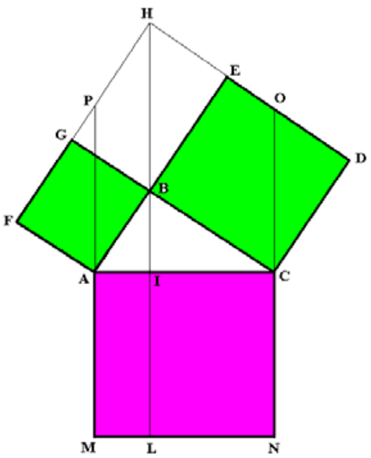
5. Le estensioni del teorema

Triangoli non rettangoli



Nella *Collezione Matematica* di **Pappo**, un matematico greco del V secolo d. C., troviamo la seguente costruzione, valida anche se il triangolo ABC **non è rettangolo**. Dato un triangolo qualsiasi ABC, costruiamo sui suoi cateti i parallelogrammi BDEC e ACFG. Inoltre prendiamo il segmento IL uguale a HC e costruiamo il parallelogramma ABNM con i lati AM e BN paralleli e uguali a IL. Poiché due parallelogrammi con la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti, abbiamo che BDEC è equivalente a BPHC e che questo è equivalente a BILN. Quindi BDEC è equivalente a BILN. In modo analogo si dimostra che ACFG è equivalente a AMLI. La somma di

BDEC e ACFG è dunque equivalente a AMNB.

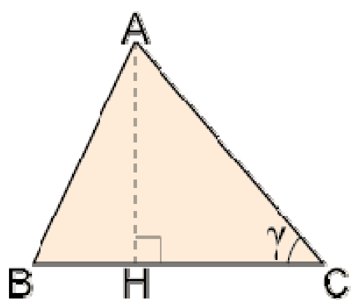


Questo risultato contiene come caso particolare il teorema di Pitagora. Infatti se l'angolo in B è retto, e BCDE e AFGB sono due quadrati, il segmento HB, e dunque IL, è congruente all'ipotenusa AC (dato che GBEH è un rettangolo con i lati uguali ai cateti), e la retta HL è perpendicolare ad AC, per cui il parallelogramma ACNM è il quadrato dell'ipotenusa.

Teorema del coseno

Il **teorema del coseno** è una generalizzazione del teorema di Pitagora al caso di triangoli non rettangoli. Questo teorema è noto anche come **teorema di Carnot**, dal nome del matematico francese Lazare Carnot (1753 – 1832), anche se in realtà il teorema è dovuto al francese François Viète (1540 – 1603)..

Enunciato: ***In un triangolo il quadrato della misura di un alto è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto della misura di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.***



Chiamando *A*, *B* e *C* i tre vertici di un triangolo e γ l'angolo in corrispondenza di *C*, si tracci l'altezza *AH* relativa al lato *BC*. Si ottengono così due triangoli rettangoli ai quali è possibile applicare il teorema di Pitagora.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$$

ma, per il teorema dei triangoli rettangoli

$$\overline{AH} = \overline{AC}\sin\gamma.$$

Vale inoltre $\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} = \overline{BC} - \overline{AC}\cos\gamma$

Sostituendo si ottiene: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2\sin^2\gamma + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\cos^2\gamma - 2\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos\gamma$

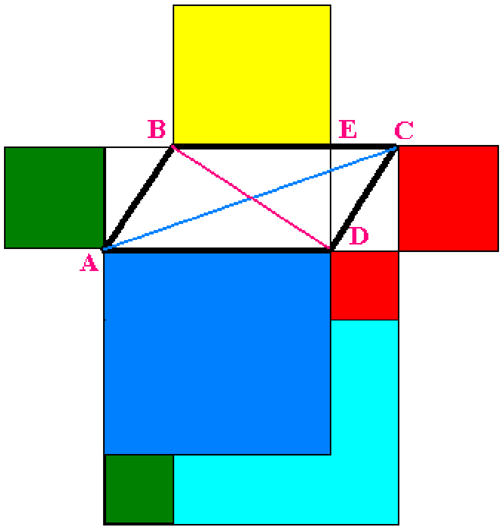
Per la relazione fondamentale $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$, questa equazione può essere semplificata in:

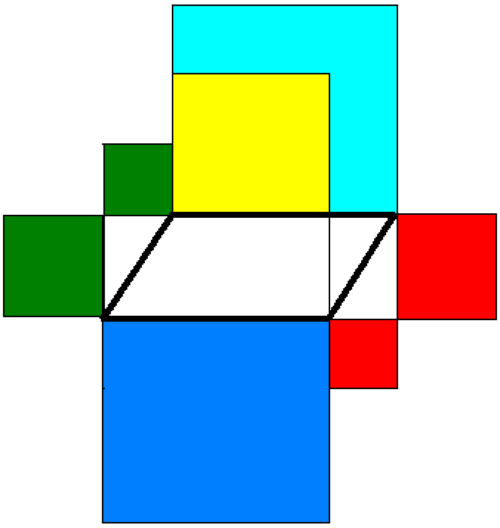
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\gamma.$$

Nel caso di un triangolo rettangolo, ovvero con γ=90°, il quarto termine è nullo e ritroviamo il teorema di Pitagora

Rettangoli e parallelogrammi

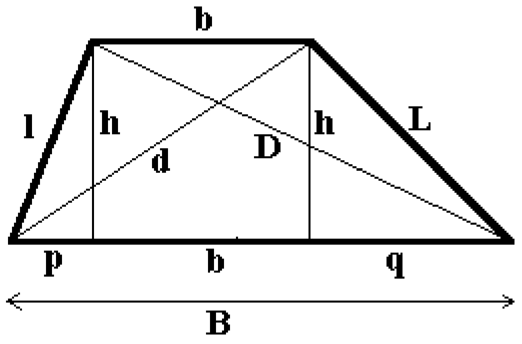
Il teorema di Pitagora si può enunciare anche in una forma un po' diversa: ***L'area della somma dei quadrati della base e dell'altezza di un rettangolo è uguale al quadrato della diagonale.***





Infatti la diagonale di un rettangolo (figura a sinistra) è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateti la base e l'altezza. Se poi prendiamo ogni quadrato due volte, avremo che: **La somma dei quadrati dei lati di un rettangolo è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali**.
Lo stesso risultato vale anche per un parallelogramma(figura a destra) non rettangolo. Consideriamo il parallelogramma ABCD. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo BED, il quadrato della diagonale BD è uguale alla somma dei quadrati di ED e di BE, colorati in verde e giallo. Analogamente, il quadrato della diagonale AC è uguale al quadrato rosso più quello multicolore. La somma delle aree dei quadrati delle diagonali è allora uguale a quella delle aree dei quattro quadrati disegnati nella prima figura. La seconda figura è ottenuta dalla prima spostando alcuni pezzi senza cambiare l'area complessiva, e quindi la somma delle aree dei quattro quadrati della prima figura (che era uguale alla somma dei quadrati delle diagonali) è uguale a quella dei sei quadrati della seconda. D'altra parte, sempre per il teorema di Pitagora, i due quadrati verdi sono uguali al quadrato del lato AB, e i due rossi al quadrato del lato AC, e dunque la somma delle aree dei sei quadrati è uguale a quella dei quadrati dei lati. Possiamo allora concludere che: **In un parallelogramma la somma delle aree dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma delle aree dei quadrati dei quattro lati.**

Trapezi

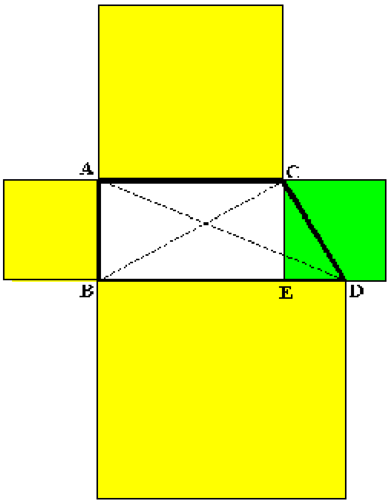


Un risultato simile vale anche per i trapezi:
La somma delle aree dei quadrati dei lati è uguale alla somma delle aree dei quadrati delle diagonali, più il quadrato della differenza tra la base maggiore e la minore. In questo caso la migliore dimostrazione è quella per via algebrica. Riferendoci alla figura che segue dobbiamo dimostrare che:
$L^2 + l^2 + B^2 + b^2 = D^2 + d^2 + (B - b)^2$.
Cominciamo applicando il teorema di Pitagora ai triangoli di lati h, q, L e h, p, l. Si ha: $h^2 + q^2 = L^2$ e $h^2 + p^2 = l^2$
Analogamente, applicando il teorema di Pitagora ai triangoli di lati h, D, b + q e h, d, b + p, risulta:
$D^2 = (b + q)^2 + h^2 = b^2 + q^2 + 2bq + h^2 = b^2 + L^2 + 2bq$

$d^2 = (b + p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 + 2bp + h^2 = b^2 + l^2 + 2bp$ e sommando

$D^2 + d^2 = L^2 + l^2 + 2b (b + p + q) = L^2 + l^2 + 2bB$.
Sostituiamo 2Bb con $B^2 + b^2 – (B - b)^2$ in questa ultima uguaglianza e otteniamo

$D^2 + d^2 = L^2 + l^2 + B^2 + b^2 – (B - b)^2$, che è quello che si voleva dimostrare.



Nel caso di un **trapezio rettangolo**, si può dare una rappresentazione visiva molto semplice. Nella figura che segue, applicando il teorema di Pitagora ai triangoli ABC ed ABD, abbiamo che la somma dei quadrati delle diagonali è uguale ai quattro quadrati disegnati. Di questi, i tre gialli sono i quadrati dei lati rispettivi, mentre il quadrato del lato CD si ottiene aggiungendo a quello verde il quadrato di DE, cioè della differenza delle basi. Se dunque ai quadrati delle diagonali si aggiunge quello della differenza delle basi, si ottiene la somma dei quadrati dei lati.

Figure simili

Nell'enunciato del teorema di Pitagora, i quadrati possono essere sostituiti da altre figure, come ad esempio triangoli, esagoni, o anche figure irregolari, purché simili tra loro. Le figure simili sono quelle che differiscono solo per grandezza, ma non per forma. Due figure sono **simili** se hanno gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti in proporzione.

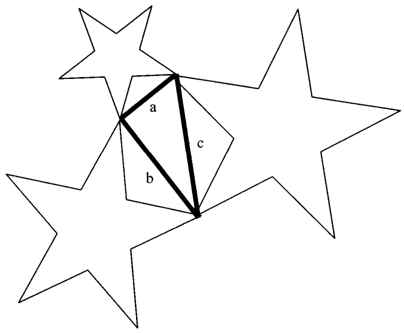
Il rapporto tra le aree di figure simili è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Infatti presi due triangoli simili, con rapporto k di similitudine , si ha

$\mathrm{A} = \frac{bh}{2}$ e $\mathrm{A}_1 = \frac{b_1 h_1}{2}$, e dunque $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}} = \frac{b_1 h_1}{bh} = \frac{kb \cdot kh}{bh} = k^2$.

Passando alle misure: $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}} = k^2 = \left(\frac{b_1}{b}\right)^2 = \frac{b_1^2}{b^2}$ e generalizzando

le aree di due poligoni simili sono proporzionali alle aree dei quadrati costruiti sui lati omologhi



Se ora prendiamo un triangolo rettangolo, e adattiamo tre stelle tra loro simili ai suoi tre lati, come nella figura, l'area S_c della stella sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree, S_a e S_b , delle due stelle costruite sui cateti. Infatti le aree di due stelle simili stanno come quelle dei quadrati dei lati $S_a : S_b = a^2 : b^2$ e anche $S_c : S_b = c^2 : b^2$.

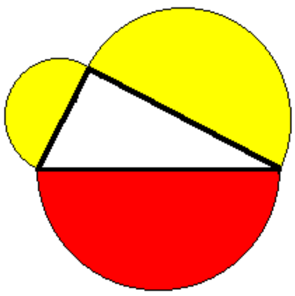
Applicando la proprietà del comporre alla prima proporzione

$(S_a + S_b) : S_b = (a^2 + b^2) : b^2 = c^2 : b^2$ che, per la seconda proporzione, è uguale a $(S_c : S_b)$ e dunque

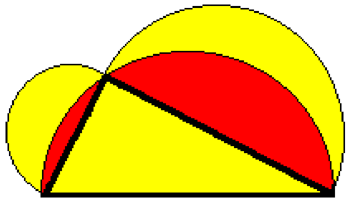
$$\mathbf{S_a + S_b = S_c}$$

Lunule

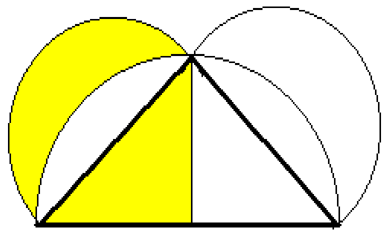
Un caso interessante è quello in cui le figure simili sono semicerchi. Ancora una volta la somma dei semicerchi sui cateti è uguale al semicerchio sull'ipotenusa.



A partire da questa ultima figura, ribaltiamo il semicerchio rosso e togliamo ai due piccoli le parti rosse in comune.



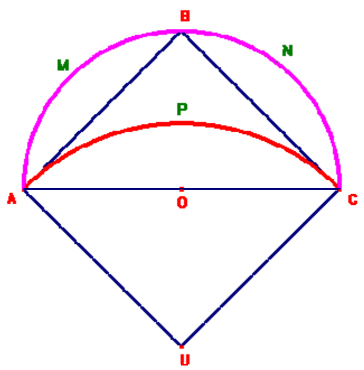
Teorema delle lunule: ***il triangolo e le due figure gialle a forma di luna (che si chiamano lunule, dal latino lunulae, piccole lune), hanno area uguale.***



Se poi il triangolo è isoscele, una lunula è uguale a mezzo triangolo.

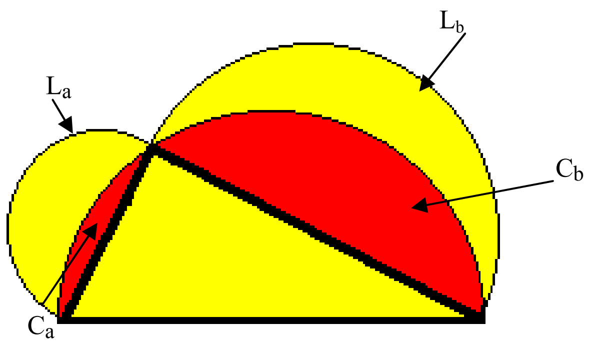
N.B.
Si dice LUNULA una superficie piana delimitata da due archi di cerchio di raggio diverso.
Il nome di Ippocrate di Chio, geometra greco vissuto ad Atene attorno al 450-420 a.C, è strettamente legato ai primi tentativi di quadratura delle lunule.

Dimostriamo il teorema delle lunule partendo dal calcolo dell'area di una lunula particolare.



Consideriamo il quadrato ABCD e i due archi di cerchio ABC e APC, aventi centro rispettivamente in O e D. La regione tra essi compresa è una *lunula*. L'area della lunula è determinabile con un calcolo elementare, osservando che si può ottenere per differenza tra il semicerchio OABC e il segmento circolare OAPC, il quale ultimo è la differenza tra il quarto di cerchio DAPC e il triangolo ADC. Si ottiene facilmente: $A_{lunula} = \frac{\pi \overline{OA}^2}{2} - \left(\frac{\pi \overline{AD}^2}{4} - \frac{\overline{AD}^2}{2} \right)$, ovvero, tenendo conto che $\overline{AO} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,\overline{AD}}{2}$ si ha, $A_{lunula} = \frac{\overline{AD}^2}{2}$,
che è come dire che l'area della lunula è metà del quadrato. Anche se questo non è il ragionamento fatto da Ippocrate, si conclude subito che la lunula è quadrabile.

La quadrabilità di questa e altre lunule fece nascere nei matematici la speranza che anche il cerchio fosse quadrabile. Ritornando alla figura con le due lunule gialle abbiamo quanto segue.



L'area della lunula costruita sul cateto **a** si trova
$L_a = \Gamma_a - C_a$, con Γ_a = "area semicerchio di diametro a" e C_a = "area zona rossa su a".
Analogamente, e con la stessa simbologia, l'area della lunula costruita sul cateto **b** si trova $L_b = \Gamma_b - C_b$.
Allora $L_a + L_b = \Gamma_a + \Gamma_b - (C_a + C_b) = \Gamma_c - (C_a + C_b) =$ "area del triangolo rettangolo". c.v.d.

6. Le terne pitagoriche

Le terne pitagoriche sono combinazioni di tre numeri che soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$.
Una terna è 3, 4, 5. Un modo per generare le terne è quello di ricomporre i quadrati: se si ha un quadrato 3x3, fatto di 9 mattonelle, e un quadrato 4x4, fatto di 16 mattonelle, allora tutte le mattonelle possono essere disposte per formare un quadrato 5x5, composto di 25 mattonelle. I pitagorici volevano trovare altre terne, altri quadrati che, sommati, formassero un terzo quadrato più grande. Essi inventarono un metodo per trovarle e nel far ciò dimostrarono altresì che il loro numero è infinito.

Noi conosciamo la dimostrazione di **Euclide**. Essa inizia con l'osservazione che la differenza fra due quadrati consecutivi è sempre un numero dispari

$(n+1)^2$	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$(n+1)^2-n^2$	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**

Ognuno degli infiniti numeri dispari può esser sommato a un particolare quadrato (pensiamo ad un numero dispari di mattonelle) per ottenere un altro quadrato. Una parte dei numeri dispari è costituito da numeri essi stessi quadrati, ma una parte dell'infinito e anch'essa infinita. Pertanto esiste anche un'infinità di quadrati dispari che possono essere aggiunti a un quadrato per ottenere il quadrato di un altro numero. In altre parole, esiste un numero infinito di terne pitagoriche.

Le terne pitagoriche sono tutte descritte dalle seguente formula

(1) $a = m^2 - n^2$**,** $b = 2mn$**,** $c = m^2 - n^2$**,**

con $m > n$ numeri naturali diversi da zero.

$\Rightarrow$ Per controllare questa affermazione basta quadrare

$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$.

<u>Più difficile è dimostrare che la formula (1) dà tutte le possibili terne.</u>

$\Rightarrow$ Intanto osserviamo che se a,b,c è una terna pitagoriche anche ha, hb, hc lo è per un qualunque numero naturale h diverso da zero. Chiamiamo dunque primitiva una terna pitagorica con ***a*** e ***b*** numeri primi tra loro (senza divisori comuni) e studiamo solo queste.

$\Rightarrow$ Osserviamo anche che ***a*** e ***b*** **devono essere uno pari e l'altro dispari**.

a e ***b*** non sono ambedue pari perché li vogliamo primi tra loro; se ***a*** e ***b*** fossero entrambi dispari lo sarebbero anche i loro quadrati e la somma dei loro quadrati risulterebbe pari, ossia $\mathbf{c^2}$ pari e dunque ***c*** pari.

D'altra parte se ***a*** e ***b*** sono dispari si deve avere

$a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2h+1)^2 = 4k^2 + 4h^2 + 4k + 4h + 2 = 4(k^2 + h^2 + k + h) + 2 = c^2$.

Ne risulta che $\mathbf{c^2}$ non è divisibile per 4 e dunque ***c*** non è pari. <u>Assurdo</u>.

Non resta che il caso ***a*** e ***b*** **uno pari e l'altro dispari.**

$\Rightarrow$ Sia ***a*** dispari e ***b*** pari.

Si ha $b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$, fattori questi entrambi pari in quanto ***a*** e ***c*** sono dispari.

Allora si può scrivere $b = 2s$, $c + a = 2x$ e $c - a = 2y$,

da cui ricaviamo $a = x - y$ e $c = x + y$.

Dunque $b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a) = 4s^2 = 2x \cdot 2y$, ossia $s^2 = xy$.

Anche x e y devono essere primi tra loro; infatti se avessero un fattore comune q, anche ***a*** sarebbe divisibile per q e anche b^2, dunque ***b*** sarebbe divisibile per q, contro l'ipotesi a e b primi.

Poiché xy è un quadrato, e x e y sono primi, devono essere essi stessi dei quadrati: $x = m^2$ e $y = n^2$.

Si avrà $a = x - y = m^2 - n^2$, $c = x + y = m^2 - n^2$ e $b^2 = 4xy = 4m^2n^2$ e dunque $b = 2mn$.

La formula (1) è così dimostrata.

7. L’ultimo teorema di Fermat

La storia dell’ultimo teorema di Fermat riguarda la ricerca di una dimostrazione mancante.
Fermat era solito chiosare i suoi libri: molti teoremi vennero trovati sui loro bordi, generalmente senza dimostrazione. La dimostrazione di questi teoremi in alcuni casi fu semplice, mentre in altri casi richiese un duro lavoro. Risultarono comunque tutti validi. L'**Ultimo teorema** prende il nome dal fatto di essere l'ultimo teorema di Fermat ad essere dimostrato, non per essere stato l'ultimo ad essere enunciato. Ad essere precisi, anzi, il suo nome era improprio, fino a quando nel 1994 non venne dimostrato, più che un teorema esso era a rigor di termini una congettura.

[Una **congettura** (dal latino *coniectūram*, dal verbo *conīcere*, ossia *interpretare, dedurre, concludere*) è una affermazione o un giudizio fondato sull'intuito, ritenuto probabilmente vero, ma non dimostrato. Il termine fu utilizzato da Karl Popper, nel contesto della filosofia scientifica. In matematica il termine trova un'applicazione quanto mai appropriata: una congettura matematica è infatti un' enunciato formulato da uno o più matematici che lo ritenevano probabilmente vero, per il quale non è tuttora conosciuta una dimostrazione.]

***Pierre de Fermat** (1601 - 1665) - magistrato francese.*
*Sebbene il suo lavoro di magistrato fosse molto impegnativo, Fermat trovò il tempo per dedicarsi in modo molto proficuo allo studio della **Matematica**. Si definiva il Principe dei dilettanti, non essendo di formazione un matematico professionista. Fermat diede importanti contributi nello studio di funzioni e nella teoria dei numeri. Fermat intratteneva una stretta corrispondenza con diversi matematici dell'epoca, ma un suo naturale riserbo insieme a una notevole riluttanza nel rendere note le sue scoperte fecero sì che il suo genio venne scoperto molto tempo dopo la sua morte, quando il figlio decise di raccogliere le carte del padre e di renderle pubbliche.*

Mentre studiava, era il 1637, il libro II dell’*Arithmetica* di **Diofanto** di Alessandria, matematico vissuto tra il 212 d.C. e il 298 d.C. e che spesso viene chiamato padre dell'algebra per le suo scoperte, Fermat si imbatté in una serie di osservazioni, problemi e soluzioni che riguardavano il teorema di Pitagora e le terne pitagoriche. Per esempio Diofanto discusse l’esistenza di particolari terne che formavano i “triangoli zoppi”, nei quali le due gambe più corte differiscono di una unità (caso b = a+1)
Anche se consapevole della dimostrazione di Euclide, Fermat fu colpito dalla varietà e dalla enorme quantità di terne. Si chiese cosa altro aggiungere all’argomento, cercando di scoprire qualcosa che fosse sfuggito ai greci. Improvvisamente, in un lampo di genialità egli creò un’equazione che, sebbene molto simile a quella di Pitagora, non aveva soluzione alcuna. Invece di considerare l’equazione $x^2 + y^2 = z^2$, Fermat considerò la variante $x^3 + y^3 = z^3$.
Ripetuti tentativi mostrarono la difficoltà di trovare due numeri (naturali) al cubo che, sommati, dessero un altro numero al cubo. Poteva un così piccola variazione portare un’equazione con un numero infinito di soluzioni a un’equazione senza soluzioni?
Fermat modificò ulteriormente l’equazione di Pitagora in $x^n + y^n = z^n$ con n >3.
Sulla sua copia dell’ *Arithmetica* , vicino al Problema 8, Fermat scrisse la famosa *nota a margine*

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

[*È impossibile scrivere un cubo come somma di due cubi o una quarta potenza come somma di due quarte potenze o, in generale, nessun numero che sia potenza maggiore di due può essere scritto come somma di due potenze dello stesso valore,**Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.]***

Questo ultimo commento avrebbe ossessionato generazioni di matematici.
Fermat non parlò mai con nessuno della sua dimostrazione e tuttavia, nonostante la sua indolenza e la sua modestia, l'Ultimo teorema di Fermat era destinato a diventare famoso in tutto il mondo nei secoli a venire.
Fermat morì nel 1665 e tutte le sue scoperte rischiarono di andare perdute. Fortunatamente il figlio maggiore, Clèment-Samuel, apprezzava l'importanza del passatempo paterno. Egli impiegò cinque anni peer raccogliere gli appunti e le lettere del padre e a esaminare le sue note a margine. Clément nel 1607 pubblicò un'edizione speciale dell' *Arithmetica* , con il titolo *Aritmetica di Diofanto con le Osservazioni di P. de Fermat.* Insieme con l'originale greco e la traduzione latina di Bachet, comparivano quarantotto osservazioni di Fermat. Quando la comunità scientifica venne a conoscenza di queste osservazioni divenne chiara la grande abilità matematica di Fermat.
Con il passare degli secoli tutte le osservazioni di Fermat furono dimostrate l'una dopo l'altra, ma l'Ultimo teorema ha resistito a lungo. Tre secoli di sforzi non sono riusciti a trovare questa dimostrazione e ciò ha determinatola notorietà del teorema, assurto al rango dell' enigma più difficile della matematica. L'Ultimo teorema è un problema di enorme difficoltà e tuttavia lo si può enunciare in una forma semplice. I tentativi di dimostrazione produssero, nel XIX secolo, grandi progressi nella teoria dei numeri, e la conferma del teorema per un numero sempre maggiore di esponenti, ma non una dimostrazione generale.

Nel suo libro *The Last Problem* , Eric Temple Bell (1883-1960) scrisse che la civiltà probabilmente sarebbe arrivata alla fine prima che il teorema potesse essere risolto. Questo testo, in cui Bell discuteva del teorema di Pitagora e dell'infinità delle terne pitagoriche, attrasse l'attenzione di un ragazzo di dieci anni, seduto nella biblioteca di Milton Road: **Andrew John Wiles** (Cambridge 1953).
Wiles apprese come Fermat fosse stato affascinato dall'opera di Pitagora e fosse giunto a studiare la forma degenerata dell'equazione di Pitagora. Rimase però perplesso dalla circostanza relativa al non ritrovamento della sua dimostrazione.

In genere metà della difficoltà in un problema matematico consiste nel capire la questione, che però in questo caso era semplice: si trattava di dimostrare che $x^n + y^n = z^n$ è priva di soluzioni in numeri interi per n maggiore di 2. Andrew non si fece scoraggiare dall'idea che le menti più intelligenti del pianeta non erano riuscite a trovare la dimostrazione. Si mise subito al lavor. Il bambino sognò di stupire il mondo. Trent'anni dopo Wiles era pronto. Dinanzi al pubblico del Sir Isacc Newton Institute presentò la sua dimostrazione. Alla fine del suo discorso, duecento matematici appladirono, festeggiandolo.
Andrew ottenne la dimostrazione nel 1995, attraverso un approccio indiretto, a prima vista totalmente scollegato dal problema stesso,e con l'uso di un arsenale di tecniche completamente astratte. Per la soluzione di un semplice problema numerico, dall'enunciato elementare e classico, sé dunque dovuto fare appello a una vasta parte della matematica superiore e moderna. E la vicenda è simbolica non soltanto dell'apparente continuità dinamica, diacronia e verticale di una singola area matematica, ma anche della nascosta connessione statica, sincronica r e orizzontale fra le aree più disparate.

BIBLIOGRAFIA

Carl B. Boyer "Storia della matematica", Arnoldo Mondatori Editore, Milano, 1980
Attilio Frajese "Attraverso la storia della matematica", Le Monnier , Firenze, 1977
Simon Singh "L'Ultimo teorema di Fermat" , BUR Biblioteca Univ. Rizzoli , 1999
Lucio Lombardo Radice "Da Pitagora a Newton" Einaudi

ARTICOLI

La Scienza "Numeri, figure, logica e intelligenza artificiale", LA BIBLIOTECA DI REPUBBLICA
Piergiorgio Odifreddi "Terne all'otto" LE SCIENZE, gennaio 2008,