

# *LOGOS ARITHMOS*



Anno scolastico 2017 /2018

Docente: Patrizia Cassieri

Studenti: Agnese Zingaretti, Veronica Monteleone, Ascanio Arioli, Marco Barriera, Alessandro Grispello, Gabriele Di Bernardo

*Accorgendomi che non c'è nulla  
(avete ragione, o carissimi  
studenti di matematica)  
che dia tanta noia, molestia  
o impaccio a chi deve far calcoli  
quanto le moltiplicazioni,  
le divisioni, le radici quadrate e  
cubiche di numeri grandi,  
le quali, oltre a un noioso spreco  
di tempo, sono spesso occasione  
di molti errori di distrazione,  
cominciare a meditare  
con quali mezzi veloci e sicuri  
avrei potuto eliminare  
questi ostacoli.*

John Napier

1550 - 1617

# LOGOS ARITHMOS

## Indice

### **PARAGRAFO 1:** *Breve storia dei logaritmi*

1.1 Archimede e la legge degli esponenti

1.2 Stifel e gli esponenti negativi

1.3 Napier inventa i logaritmi

1.4 Briggs e le tavole dei logaritmi

### **PARAGRAFO 2:** *Il regolo, uno strumento universale*

2.1 La scala logaritmica

2.2 Il regolo calcolatore

### **CURIOSITÀ:** *Non c'è niente di più problematico e fastidioso che eseguire moltiplicazioni*

C1 Moltiplicazione turca

C2 Moltiplicazione egiziana

C3 Moltiplicazione araba

C4 Bastoncini di Nepero

# PARAGRAFO 1: Breve storia dei logaritmi

## 1.1 Archimede e la legge degli esponenti

Già **Archimede** (287 circa a. C.- 212 circa a. C.) nell' *Arenario* scrive della relazione esistente tra una progressione geometrica, formata dalle successive potenze di un numero naturale, e i relativi esponenti che sono in progressione aritmetica. L'aspetto matematico saliente è l'indagine sulla possibilità di esprimere numeri interi qualsiasi utilizzando il sistema non posizionale in uso presso i greci. Il sistema di numerazione in uso all'epoca di Archimede era alfabetico e poggiava sulle seguenti corrispondenze:

1	$\alpha$	2	$\beta$
3	$\gamma$	4	$\delta$
5	$\varepsilon$	6	stigma
7	$\zeta$	8	$\eta$
9	$\vartheta$	10	$\iota$
20	$\kappa$	30	$\lambda$
40	$\mu$	50	$\nu$
60	$\xi$	70	$\omicron$
80	$\pi$	90	coppa
100	$\rho$	200	$\sigma$
300	$\tau$	400	$\upsilon$
500	$\varphi$	600	$\chi$
700	$\psi$	800	$\omega$
900	sampi	1000	$\cdot\alpha$

L'osservazione del legame esistente tra progressioni aritmetiche e geometriche si può considerarsi come segnale precursore della scoperta dei **logaritmi**

Per chiarire i concetti espressi affianchiamo i termini di una progressione geometrica di ragione  $q = 2$  con quelli della progressione aritmetica di ragione  $d = 1$ , che coincidono con gli esponenti

Progressione geometrica	Progressione aritmetica
$a_0 = 1$	0
$a_1 = 2$	1
$a_2 = 4$	2
$a_3 = 8$	3
$a_4 = 16$	4
$a_5 = 32$	5
$a_6 = 64$	6

Per calcolare il prodotto  $a_n \times a_m$  di due termini della progressione geometrica basta cercare il termine della progressione aritmetica che occupa la posizione  $n+m$  e leggere il corrispondente nella progressione aritmetica.

Esempio:  $4 \times 16 = a_2 \times a_4 = a_{2+4} = a_6 = 64$

Proprio la riduzione di prodotti in somme è la proprietà che ha decretato il grande successo dei logaritmi; infatti  $\log_2(4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16 = 2 + 4 = 6$  e  $2^6 = 64$ .

Era necessaria però la conquista della notazione decimale posizione per far camminare l'idea.

## 1.2 Stifel e gli esponenti negativi

Michael **Stifel** (1485 – 1567), matematico tedesco, nella sua opera *Aritmetica Integra* del 1544 affronta il problema confrontando le progressioni estendo a potenze con esponente negativo

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

e scrive:” *L’addizione nella progressione aritmetica corrisponde alla moltiplicazione in quella geometrica; del pari la sottrazione nella prima corrisponde alla divisione nella seconda. La semplice moltiplicazione nella progressione aritmetica diventa moltiplicazione in sé [elevamento a potenza] nella progressione geometrica. La divisione nella progressione aritmetica ha con l’estrazione di radice nella progressione geometrica, lo stesso rapporto che ha per esempio la divisione per due con l’estrazione di radice.*”

Esempio

512:64 equivale a  $9-6=3$  e il numero che sta sotto il 3 è appunto il quoziente, 8;

$4^3$  si ottiene sommando il numero 2, che corrisponde al 4, tre volte  $2+2+2=6$  sotto il cui valore si trova il risultato voluto e cioè 64.

$\sqrt[4]{256}$  si ottiene  $8:4=2$ , da cui il risultato voluto 4.

In pratica si sono eseguite operazioni aritmetiche con potenze. I tempi erano maturi perché i logaritmi fossero inventati. Ma condizione necessaria perché nelle progressioni si potesse trovare un numero adeguato di valori era quella di avere un rapporto di formazione che fosse il più possibile prossimo a 1, in modo che i termini della successione fossero vicini l’uno all’altro.

## 1.3 Napier inventa i logaritmi

John Napier (1550 – 1617), gentiluomo della campagna scozzese che si diletta di matematica, determina un procedimento che avrebbe risolto il problema di eseguire calcoli molto lunghi e complicati. Chiama i nuovi numeri *logaritmi* coniando un neologismo dalle forme greche di *logos* (rapporto) e *arithmos* (numero) che rendeva subito l’idea sulle loro proprietà. Nel 1614 pubblica *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. L’idea centrale su cui si basa il ragionamento di Napier è la scelta di porre

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

dove L è il logaritmo neperiano del numero N. Si ha quindi che il logaritmo di  $10^7$  è 0 mentre il logaritmo di  $10^7(1 - 10^{-7})^1$  è 1. La generazione dei logaritmi è da Napier concepita in maniera dinamica in termini di movimento sincrono – come, *fluxio*, scorrimento di due progressioni – e questo gli consente una coordinazione puntiforme delle medesime per produrre i suoi logaritmi.

#### 1.4 Briggs e le tavole logaritmiche

Henry Briggs (1561 – 1631), docente inglese di geometria, fu subito entusiasta nel leggere l'opera di Napier e scrive

*Napier con i suoi nuovi e ammirabili logaritmi mi sta facendo lavorare moltissimo con il pensiero e con le mani.*

Briggs incontra Napier nel 1615 e gli suggerisce che sarebbe più conveniente scrivere delle tavole in cui  $\log 1=0$  e  $\log 10=1$  per evitare frazioni.

Briggs nel 1617 pubblica la prima tavola dei logaritmi in base 10: *Logarithmorum chilias prima*.

Il suo lavoro è stato fondamentale, le tavole dei logaritmi comuni in uso sono tutte derivate da quelle di Briggs.

Scriva Carl Boyer nella sua "Storia della matematica": *...raramente è avvenuto che una nuova scoperta incontrasse una fortuna così rapida come l'invenzione dei logaritmi: il risultato fu la pronta comparsa di tavole dei logaritmi che erano più che sufficienti per le esigenze del tempo.*

Certo Briggs non può immaginare che il nuovo sistema di calcolo ed il numero

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , base dei logaritmi naturali, sarebbe diventato l'asse portante di tutta la matematica infinitesimale, né che la funzione logaritmica sarebbe stata il ponte di passaggio per effettuare integrazioni insolubili e che il numero e avrebbe avuto un futuro nel calcolo della probabilità, ma il suo grande entusiasmo è presto condiviso da tutti i matematici del suo secolo.

Keplero ad esempio accoglie subito i logaritmi con grande interesse e li usa nei suoi lavori.

## Paragrafo 2: *Il regolo, uno strumento universale*

### 2.1 La scala logaritmica

I logaritmi decimali *traducono* ogni numero positivo in una potenza, certo non sempre intera, di 10 con grande precisione. La *traduzione* effettuata permette poi di eseguire moltiplicazioni nella forma agevole della somma degli esponenti. Il calcolo viene poi completato eseguendo la *traduzione* opposta, dalla forma di potenza di 10 a quella decimale usuale. Il vocabolario che traduce i numeri dalla forma decimale a quella di potenze di 10 si chiama Tavola dei Logaritmi e costruire una scala logaritmica è possibile

A seguito degli studi di Nepero sui Logaritmi ci fu subito chi pensò di sfruttare l'idea in modo da velocizzare i calcoli, anche a scapito della precisione. Già nel 1623 Edmund Gunter, professore di astronomia al Gresham College di Londra, sviluppa una scala logaritmica sulla quale, con l'aiuto di un compasso, si possono eseguire graficamente moltiplicazioni e divisioni.



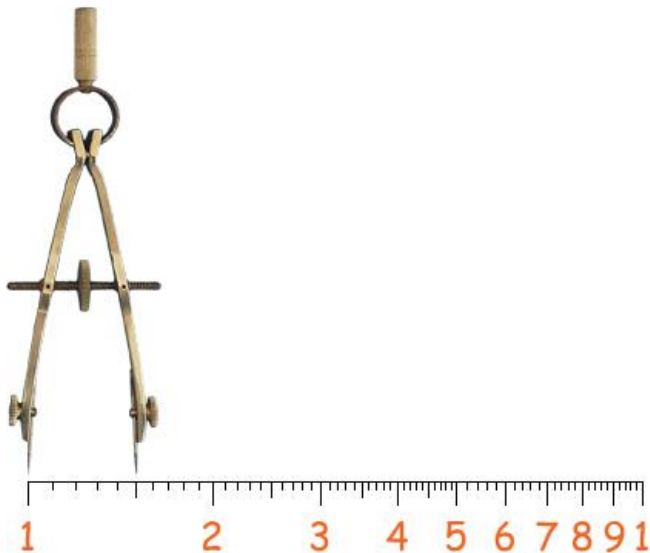
Una scala logaritmica tratta di un righello in cui si riportano tacche a distanze proporzionali ai logaritmi dei numeri da 1 a 10. Nel diagramma ogni tacca corrisponde al logaritmo del numero, ma la sigla "log" non è assolutamente necessaria:



A destra si scrive un 1 e non un 10: questa è una pratica utilizzata in tutti i regoli calcolatori. In pratica all'uno di destra corrisponde un 10; inoltre, come vedremo, in qualche caso l'uno di destra viene usato proprio come... 1 e non come 10.

Ora ammettiamo di voler moltiplicare 1,5 per 4 con questa scala e un compasso, proprio come faceva il Gunter: basterà aprire il compasso a un'apertura corrispondente al logaritmo di 1,5 e riportare la stessa apertura sul 4.

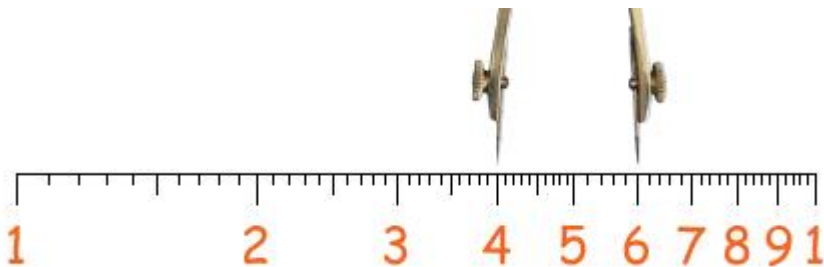
Vediamo il procedimento passo per passo:



La punta destra del compasso è posizionata sulla tacca del 1,5. La punta sinistra va messa sulla tacca del 1, perché quella tacca rappresenta il logaritmo di 1, e il logaritmo di 1 è 0. In questo modo l'apertura del compasso corrisponde alla differenza fra logaritmo di 1,5 e logaritmo di 1, quindi:

$$\log(1,5) - \log(1) = \log(1,5) - 0 = \log(1,5)$$

Una volta trovata l'apertura del compasso, basta traslarlo verso destra:



Ecco che mettendo la punta sinistra del compasso sulla tacca del 4 si ritrova la punta destra sul 6:

$$\log(4) + [\log(1,5) - \log(1)] = \log(4) + \log(1,5) = \log(4 \times 1,5) = \log(6) \text{ e infatti } 1,5 \times 4 = 6.$$

Costruita una scala logaritmica è possibile costruire

## 2.2 [Il regolo calcolatore](#)



## **CURIOSITÀ:** *Non c'è niente di più problematico e fastidioso che eseguire moltiplicazioni ....*

### **C1 Moltiplicazione turca**

La moltiplicazione turca si esegue semplicemente con le dita delle mani.

Immaginiamo di voler calcolare  $6 \times 8$ .

Per prima cosa chiudiamo le mani a pugno, poi solleviamo nella mano sinistra tante dita quante sono le unità che dobbiamo aggiungere al 5 per ottenere il primo numero da moltiplicare. Per rappresentare il 6 dobbiamo alzare un dito solo, il pollice.

Adesso facciamo la stessa cosa con la mano destra per il secondo numero da moltiplicare; nel nostro caso 8, per cui bisogna sollevare tre dita.

*Adesso possiamo risolvere la moltiplicazione.*

*Il primo passaggio consiste nel contare le dita alzate: ogni dito alzato vale 10. Avendo 4 dita alzate otteniamo 40.*

*Il secondo passaggio consiste nel contare le dita chiuse a pugno e moltiplicarle: nel nostro caso abbiamo 4 dita chiuse nella mano sinistra e due nella destra:  $4 \times 2 = 8$ .*

*Infine, si sommano i due parziali:  $40 + 8 = 48$ .*

La moltiplicazione turca è comoda perché ci si riconduce a eseguire somme e moltiplicazioni più semplici, il che è molto utile se non si conoscono le tabelline (nel nostro caso, abbiamo dovuto eseguire a mente la moltiplicazione  $4 \times 2$  anziché quella originaria,  $6 \times 8$ ).

Il limite di questo metodo è che funziona solo con i numeri da 1 a 10, a meno di complicare molto il procedimento.

### **C2 Moltiplicazione egiziana**

È uno dei metodi più antichi per eseguire le moltiplicazioni.

*Immaginiamo di voler moltiplicare 26 per 54.*

*Tracciamo due colonne.*

*Sulla prima si parte da 1 e si raddoppia ogni volta, senza superare il primo numero (nel nostro caso 26: ci fermiamo a 16 perché raddoppiandolo si arriverebbe a 32, che è maggiore di 26).*

*Sulla seconda colonna partiamo invece con il secondo numero e lo raddoppiamo tante volte quante sono i numeri della prima colonna:*

1	54
2	108
4	216
8	432
16	864

*Osserviamo adesso che, nella prima colonna, la somma di  $2 + 8 + 16$  dà 26. Indichiamo in corsivo questi numeri e i loro corrispettivi sulla colonna di destra.*

*Adesso sommiamo i numeri in corsivo della seconda colonna:  
 $108+432+864=1404$ .*

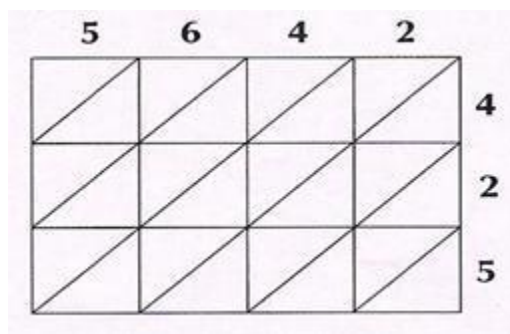
*Questo è il risultato della moltiplicazione  $26 \times 54$  !!!*

Con questo sistema le uniche moltiplicazioni che bisogna saper fare a mente sono quelle per 2.

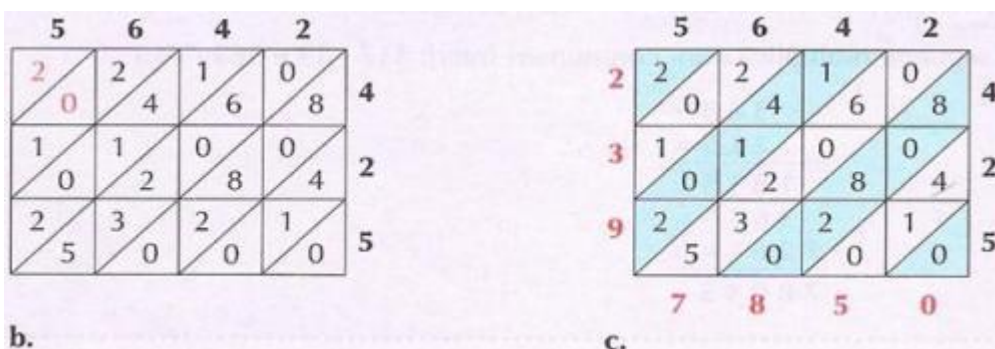
### C3 Moltiplicazione araba

Il metodo usato dagli Arabi nel medioevo presuppone la conoscenza delle tabelline, ma consente di eseguire rapidamente moltiplicazioni fra numeri anche molto grandi.

Questo metodo curioso per eseguire una moltiplicazione risale al **XVI secolo** e noi proviamo adesso ad applicarlo al prodotto dei due fattori: **5642** e **425**. Costruiamo un **rettangolo** con la base formata da quattro parti (tante quante sono le cifre del primo fattore) e l'altezza di tre parti (tante quante sono le cifre del secondo fattore). Costruiamo quindi la **graticola** seguente con le caselle divise a metà da una diagonale e scriviamo esternamente al rettangolo le **cifre dei due fattori**.



In ogni casella, separando le cifre delle decine da quelle delle unità, scriviamo il prodotto 5 per 4: metteremo la cifra 2 delle decine nella metà superiore e lo 0 delle unità nella metà inferiore. Ripetendo la stessa procedura per tutte le celle otteniamo lo schema in fig. b). Sommiamo ora le cifre che si trovano sulla stessa diagonale a partire dall'angolo in basso a destra e riportando le eventuali decine alla diagonale successiva (fig. c).



Se ora leggiamo le cifre ottenute accostandole una all'altra, partendo dalla cifra in alto a sinistra, otteniamo il prodotto cercato, cioè 2 397 850.

### C4 I bastoncini di Nepero

