I Seminari dell'Umanesimo Latino 2001-2002, Fondazione Cassamarca,
Antilia, Treviso, 9-32

Larte de labbacho (l'*Aritmetica* di Treviso, 1478) e la matematica medievale

Giorgio T. Bagni
Ateneo di Treviso
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma "La Sapienza"

1. Il primo libro di Matematica stampato al mondo

La pubblicazione della *Bibbia* di Gutenberg, impressa nel 1456 mediante la tecnica della stampa a caratteri mobili, determinò una vera e propria rivoluzione nella diffusione della cultura, dai punti di vista quantitativo e qualitativo: e la matematica non rimase estranea ad un'innovazione di tale straordinaria portata. Verso la fine del XV secolo si diffusero molti manuali di aritmetica ([1]): nel 1478 vide la luce a Treviso il primo libro di matematica a stampa pubblicato al mondo, *Larte de labbacho*, un manuale anonimo noto come l'*Aritmetica di Treviso* (si veda la riedizione anastatica dell'incunabolo: Romano, 1969).

Non ci occuperemo delle questioni di priorità, non sempre motivate, che hanno riguardato il manuale trevigiano ([2]): *Larte de labbacho* peraltro è ormai universalmente considerato il primo di libro di matematica stampato (Smith, 1924, 1958 e 1959, pp. 1-12; Rouse Ball, 1927; Struik, 1981; Stillwell, 1997; a *Larte de labbacho* è dedicato il saggio: Swetz, 1987, in cui è riportata la completa traduzione inglese dell'opera). Gli studiosi concordano nell'accettare il 10 dicembre 1478, come riportato nell'ultima carta dell'incunabolo, quale data di pubblicazione. Qualche discordanza emerge per quanto riguarda lo stampatore, che secondo alcuni sarebbe il fiammingo Gerardo da Lisa (Rhodes, 1983; Bortolato & Contò, 1985), secondo altri Michele Manzolo, detto Manzolino (Federici, 1805; D'Acais & Porro, 1969; Romano, 1969; Picutti, 1977) ([3]).

Larte de labbacho è un manuale costituito da sessantadue pagine non numerate ed è dedicato “a ciascheduno che vuole usare larte de la merchadantia chiamata vulgarmente larte de labbacho”: l’impostazione didattica appare chiara; i numerosi esempi sono adeguatamente calibrati per difficoltà. Nella sezione seguente analizzeremo la struttura del lavoro, che si rivela interessante anche per lo studioso contemporaneo (Bagni, 1989, 1995).

2. La struttura de *Larte de labbacho*

Interessante ne *Larte de labbacho* è il ruolo delle definizioni dei principali concetti e delle operazioni (Romano, 1969). Il numero è così introdotto:

> “Numero e una moltitudine congregata overo insembrada da molte unitade. et almeno da do unitade. come e .2. el quale e lo primo e menore numero: che se truova. La unitade e quella cosa: da la quale ogni cosa si ditta una” (carta di testo n. 1 retto).

La distinzione dei numeri in *semplici*, *articuli* e *misti* sembra motivata da esigenze collegate all’esecuzione pratica delle operazioni (in particolare della moltiplicazione e della divisione):

> “Se truova numeri de tre maniere. El primo se chiama numero simplice. laltro numero articulo. El terzo se chiama numero composito overo misto. Numero simplice e ogni numero: chi presenta manco de diece. e si presentato per una sola figura. come 1.2.3. etc. Numero articulo e ogni quello: el quale se puo partire in diece parte eguale in modo che niente soperavanza da quello. come sono 10.20.30. e simili numeri. Numero misto e quello: del quale el suo valore presenta piu de diece: ma lo so valore non puo fir partito in diece parte eguale senza soperavanzo. come .11.12.13. etc.” (carta di testo n. 1 retto e rovescio).

L’Autore presenta poi i cinque *atti* fondamentali della pratica aritmetica:

> “Cinque sono gli atti: li quali besogna sapere a chi vuol intendere la fine di questa prattica. zoe. Numerare. Iongere. Cavare. Moltiplicare. e Partire” (carta di testo n. 1 rovescio).

Molta cura viene riservata alla presentazione della numerazione:

> “Numeratione adoncha e de ciaschaduno numero per le soe figure conveniente artificiosa representatione. la quale se fa con diece lettere overo figure. zoe sono queste. .1.2.3.4.5.6.7.8.9.0. De le quale la prima figura .zoe .1. non e chiamato numero: ma ben e principio de numeri. E la decima figura. zoe .0. se chiama cifra o vero nulla .zoe. figura de niente perche in se niente leva: ma ioncta a le altre figure: fa crescere il loro valore. Nota adoncha bene. che quando tu truovi una figura sola: il suo valore de quella non puo passare nove. zoe .9.” (carta di testo n. 1 rovescio).

Ne *Larte de labbacho* non compaiono i segni con i quali, modernamente, sono indicate le operazioni aritmetiche (+, –, ×, :), in quanto, rispetto alla data di pubblicazione del manuale trevigiano (1478), l'introduzione di tali segni è più tarda (Tahta, 1985). Sebbene un simbolo vicino al nostro + sia apparso in un manoscritto del 1417, troviamo i segni + e – stampati in *Aritmetica Mercantile* o *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, di Johannes Widmann, opera pubblicata a Lipsia nel 1489; tali simboli erano però riferiti soltanto a problemi commerciali. Giel Van der Hoecke usò + e – come segni di operazione in *Een sonderlinghe boeck in dye edel conste Arithmetica* (Anversa, 1514). Henricus Grammateus (Heinrich Schreyber) pubblicò nel 1518 *Ayn new Kunstlich Buech,* in cui + e – erano ampiamente usati per le addizioni e per le sottrazioni. La definitiva diffusione di tali segni seguì la pubblicazione dell'opera di Robert Recorde *The Whetstone of Witte*, nel 1557 (Cajori, 1928-1929).

Il simbolo di moltiplicazione × (che può operativamente collegarsi alla moltiplicazione "per crocetta" descritta anche ne *Larte de labbacho*: Romano, 1969) venne usato da William Oughtred (1574-1660) in *Clavis Mathematicae*, lavoro scritto intorno al 1628 e pubblicato a Londra nel 1631 (era indicato come "croce di Sant'Andrea"). Nel 1618 il segno era apparso in un'appendice anonima alla traduzione di Edward Wright della *Descriptio* di Napier (forse tale appendice è opera dello stesso Oughtred). L'uso di indicare la moltiplicazione con un singolo puntino è sensibilmente più tardo: viene fatto risalire a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a Thomas Harriot (1560-1621) in *Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas,* opera pubblicata postuma nel 1631, ed a Thomas Gibson in *Syntaxis mathematica* del 1655. Il simbolo di divisione (:) venne usato nel 1633 in *Johnson Arithmetik in two Bookes* pubblicata a Londra. Indicava però esclusivamente delle frazioni (ad esempio si scriveva 4:5 per 4/5). Leibniz lo usò sia per indicare rapporti che per indicare l'operazione di divisione nel 1684 negli *Acta Eruditorum Lipsiae*.

Ne *Larte de labbacho* le operazioni aritmetiche sono così denominate ed indicate:

- "iongere" (sommare), operazione indicata dalla parola "et";
- "levare, cavare" (sottrarre), operazione indicata dalla parola "de";
- "moltiplicare", operazione indicata dalla parola "fia";
- "partire" (dividere), operazione indicata dalla parola "in".

Per ogni operazione, l'Autore de *Larte de labbacho* indica sistematicamente:

- una definizione (spesso si tratta di una descrizione nella quale si impiegano termini tratti dal linguaggio naturale);
- quanti numeri sono necessarî per l'esecuzione dell'operazione;
- eventuali condizioni da imporre a proposito di tali numeri;
- le modalità di esecuzione pratica.

La presentazione delle operazioni atitmetiche ne *Larte de labbacho* può essere considerata una vera e propria "introduzione al *problem solving* commerciale" (Swetz, 1987, p. 223), strettamente collegata ad esempi con grandezze decimali e non decimali (come alcuni casi di unità monetarie e delle loro frazioni): sottolineiamo nuovamente che ciò dipende dalla natura del manuale e dal periodo storico in cui esso venne redatto.

L'addizione è così presentata:

> "Per intendimento del secondo atto .zoe. del iongere: sapi che iongere e una assonanza de piu figure et a mancha de do[…] E nota che nel atto de iongere do numeri al mancho sono necessarii .zoe. lo numero al qual de fir ionto laltro: el quale die esser mazore. et el numero: che de fir ionto a quello: lo quale die esser minore. per che sempre e da iongere el menor numero al mazore" (carte di testo n. 3 rovescio e 4 retto).

L'Autore però precisa che quanto ora indicato "e piu conveniente che fare el contrario" e che "sel se fara a quel modo overo al contrario: sempre nascera una medesima cosa" (carta di testo n. 4 retto). Dunque viene esplicitamente riconosciuta la proprietà commutativa dell'addizione.

La sottrazione è così presentata:

> "Latto de cavare non e altro: che de do numeri […] trovare quanto resta de lo menore al mazore acio chel se possa cognoscere quel resto" (carta di testo n. 9 retto e rovescio).

Dopo avere esplicitamente osservato che "nel cavare […] sono do numeri necessarii .zoe. el numero dal qual si cavato: el numero che fi cavato da quello" e che "mazor da menore non può fir cavato" (carta di testo n. 9 rovescio), l'Autore riconosce la sottrazione come operazione inversa dell'addizione ("Torna al atto de iongere e provaralo per latto de cavare": carta di testo n. 10 rovescio).

La moltiplicazione è così presentata:

> "Attendi lettore al quarto atto .zoe. al moltiplicare. Per intelligentia del quale el e de savere. che moltiplicare uno numero […] per uno altro: non e altro: che de do numeri propositi: trovare uno terzo numero: el quale tante volte contien uno de quelli numeri: quante unitade sono nel altro […] Intendi bene. che nella moltiplicatione sono principalmente do numeri necessarii .zoe el numero moltiplicatore et el numero de fir moltiplicato" (carta di testo n. 14, retto).

Analogamente a quanto fatto per l'addizione, anche per la moltiplicazione si suggerisce di considerare come primo fattore il maggiore dei due fattori; ma viene poi esplicitamente riconosciuta la proprietà commutativa della moltiplicazione (carta di testo n. 14 retto e rovescio).

La divisione è presentata come operazione inversa della moltiplicazione:

"Partire e de do numeri propositi: trovare uno terzo numero: el quale se trova tante volte nel mazore: quante unitade sono nel menore. el quale tu troverai: se tu guarda quante fiade el menore numero se trova nel mazore" (carta di testo n. 22 rovescio).

Analogamente a quanto fatto per le altre operazioni, l'Autore annota:

"E da notare che nel partire sono tre numeri necessarii .zoe. el numero che de fir partito: el partitore: e la parte" (carta di testo n. 22 rovescio).

"Chel numero che de fir partito sempre de essere mazore: o vero al mancho eguale al partitore. E quando quelli sono eguali sempre nasce .1. per parte" (carta di testo n. 23 retto).

Riassumiamo nella Tab.1 le osservazioni presenti ne *Larte de labbacho* sulle quattro operazioni.

Operazione	Numeri necessari	Condizioni
Addizione	Sono necessari (almeno) due addendi; non viene ricordata esplicitamente la somma.	È opportuno che il primo addendo sia maggiore del secondo, ma viene riconosciuta la proprietà commutativa.
Sottrazione	Sono necessari due numeri, il minuendo e il sottraendo; non viene ricordata esplicitamente la differenza.	Il minuendo deve essere non minore del sottraendo.
Moltiplicazione	Sono necessari (almeno) due fattori; non viene ricordato esplicitamente il prodotto.	È opportuno che il primo fattore sia maggiore del secondo, ma viene riconosciuta la proprietà commutativa.
Divisione	Sono necessari tre numeri: il dividendo, il divisore e il quoziente.	Il dividendo deve essere non minore del divisore.

Tab. 1

Osserviamo dunque che:

- l'Autore sottolinea con cura che le operazioni introdotte sono binarie (il riferimento ai "tre numeri necessarii .zoe. el numero che de fir partito: el partitore: e la parte", nella carta di testo n. 22 rovescio, sembra un'eccezione: è l'unico caso in cui viene considerato anche il risultato tra i "numeri necessarii" all'esecuzione dell'operazione in esame);

- per quanto riguarda l'addizione (e la moltiplicazione), viene riconosciuta la proprietà commutativa, ma si suggerisce di considerare gli addendi (ed i fattori) in ordine decrescente, per motivi pratici;
- nella sottrazione si richiede che il minuendo sia non maggiore del sottraendo per evitare risultati negativi;
- nella divisione la condizione enunciata mira ad escludere i casi con il quoziente nullo.

3. Le operazioni ne *Larte de labbacho*

Le regole pratiche per l'esecuzione delle operazioni aritmetiche proposte ne *Larte de labbacho* sono state ampiamente studiate e non presentano caratteristiche di originalità ([4]). Alcune particolarità sono comunque interessanti; ad esempio, il metodo di sottrazione presentato ne *Larte de labbacho* si differenzia da quello diffuso ai giorni nostri; seguiamo l'esecuzione di 452 – 348:

> ".8. de .2. non se puo cavare: ma .2. me compie .10. quel .2. che te ha compi el to .10. tu die iongere a laltro .2. che sora .8. dicendo .2. e .2. fa .4. el qual tu die scrivere per resto sotto quel .8. con questa conditione: che a la figura seguente al .8. zoe al .4. tu die iongere .1." (carta di testo n. 10 retto).

Dal punto di vista pratico, il procedimento de *Larte de labbacho* (che non prevede il "prestito" tra le cifre del minuendo) appare talvolta più agevole rispetto al procedimento oggi usato. Consideriamo l'esempio (Bagni, 1995):

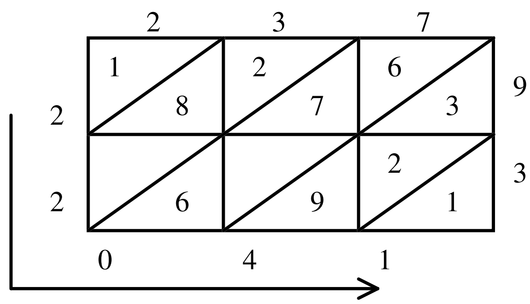
$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,4\ - \\ 8\,2\,6\ = \\ \hline 1\,7\,8\ \ \ \end{array}$$

Il procedimento oggi diffuso (del "prestito" tra le cifre del minuendo) può comportare difficoltà; l'esecuzione di 4 – 6 non è possibile e la necessità di prendere in "prestito" una decina per eseguire 14 – 6 può apparire delicata: la più vicina cifra non nulla si trova infatti tre cifre a sinistra del 4. I "prestiti" devono avvenire ripetutamente (la sequenza 1-0-0-4 diviene: 0-9-9-14): ciò potrebbe essere causa di qualche imbarazzo per l'esecutore (si veda: Bagni, 1994a, in cui si esaminano ad esempio: Morel, 1742, Pereira 1760, Paulini a S. Jo. 1767, Pincherle 1920).

Il procedimento descritto ne *Larte de labbacho* si rivela più semplice: per "salire da" 6 a 14 (giacché da 6 a 4 non è possibile) si scrive 8 e si aumenta il 2 (seconda cifra da destra del sottraendo) di 1, ottenendo 3; da 3 a 10 (giacché da 3 a 0 non è possibile) si scrive 7 e si aumenta la cifra 8 di 1, ottenendo 9. Infine: 10–9 = 1, e l'operazione è conclusa. Non è dunque necessaria la lunga sequenza delle "prese in prestito" e l'esecuzione appare complessivamente meno insidiosa (Bagni, 1994b).

La moltiplicazione, ne *Larte de labbacho*, è riferita ad alcuni metodi pratici; tra questi, presentiamo quello detto "per graticola" (talvolta identificato da termini quali "moltiplicazione fulminea", o "a gelosia", o "a reticolo"), noto agli Arabi e probabilmente agli Indiani (Bagni, 1996, I).

Moltiplicando e moltiplicatore devono essere scritti ai lati di una tabella rettangolare, all'interno della quale vengono disposti i prodotti parziali (si veda l'esempio riportato di seguito: 237×93 = 22041). Il risultato finale si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, considerando gli eventuali riporti, e può essere letto ai lati della tabella nei quali non sono scritti i fattori. Il risultato (22041) si legge a sinistra e al di sotto della tabella allineando le cifre in senso antiorario.



4. *Larte de labbacho* e la matematica medievale

Come si colloca *Larte de labbacho* nella matematica del tardo medioevo?

Per rispondere è necessario osservare che alla fine del Quattrocento l'aritmetica affrontò uno dei momenti più importanti della propria evoluzione: i procedimenti pratici furono progressivamente sostituiti dalla speculazione razionale; si diffuse quindi lo studio dell'algebra, una disciplina caratterizzata da una sempre maggiore profondità ed originalità che si preparava a dar vita ad un capitolo assai importante della storia della matematica.

Sebbene il termine "algebra" tragga origine da *Al jabr wal muqabala*, opera scritta nell'830 da Mohammed Ibn Musa Al Kuwarizmi ("al -jabr" significa "ristabilire" ed è un termine riferito al procedimento didatticamente detto "regola del trasporto", impiegato nella risoluzione delle equazioni), le radici storiche di questo importante settore della matematica sono molto più antiche: già in Mesopotamia ed in Egitto erano considerate e risolte (anche se con riferimento ai soli numeri positivi) alcune equazioni di primo e di secondo grado (Bagni, 1996, I). I Greci si occuparono di algebra nel periodo alessandrino: Erone di Alessandria, Nicomaco di Gerasa e in particolare Diofanto di Alessandria, autore della splendida *Arithmetica* in tredici libri, ebbero un ruolo primario nello sviluppo del calcolo algebrico.

Dal punto di vista del simbolismo, a parte quello introdotto da Diofanto, purtroppo complicato e scomodo e dunque privo di diffusione significativa (Bagni, 1996, I), il passaggio dall'*algebra retorica* (utilizzata ad esempio da Al

Kuwarizmi, in cui le equazioni erano semplicemente descritte con parole tratte dalla lingua comune) all'*algebra sincopata* (in cui si ricorreva ad alcune descrizioni abbreviate) avvenne proprio verso la fine del XV secolo ([5]). Esempi di algebra retorica, tratti dai lavori di aritmetica medievale, sono i seguenti (Franci & Toti Rigatelli, p. 9):

cose uguale a numero	indicava l'equazione	$ax = b$
censi e cose uguale a numero	indicava l'equazione	$ax^2+bx = c$
censi uguale a numero	indicava l'equazione	$ax^2 = b$
censi uguale a cose	indicava l'equazione	$ax^2 = bx$
censi e numero uguale a cose	indicava l'equazione	$ax^2+c = bx$
censi uguale a cose e numero	indicava l'equazione	$ax^2 = bx+c$
cubo e cose uguale a numero	indicava l'equazione	$x^3+bx = c$
cubo uguale a cose e numero	indicava l'equazione	$x^3 = bx+c$
cubo e numero uguale a cose	indicava l'equazione	$x^3+c = bx$

Tra le opere matematiche del XV secolo notevoli sono i trattati di Johann Müller da Königsberg detto Regiomontano (1436-1476) e di Nicolas Chuquet, *Triparty en la science des nombres* (1484) (Marre, 1880-1881): l'espressione algebrica in esse impiegata era ancora retorica, ma non è difficile ravvisare in essi la presenza delle prime manifestazioni di algebra sincopata (ricordiamo che in tale periodo comparvero alcune notazioni per gli esponenti, anticipate peraltro di un secolo dalle intuizioni di Nicola d'Oresme). L'algebra sincopata fu utilizzata da uno dei principali protagonisti della matematica tra il XV ed il XVI secolo, Luca Pacioli (1445-1514):

"Trouame 1.n °. che gioto al suo qdrat° facia .12"

rappresentava l'equazione modernamente indicata: $x+x^2 = 12$. Solo nell'algebra simbolica (che sarà infine utilizzata da François Viète, circa un secolo dopo Pacioli) tutte le operazioni e tutte le quantità saranno espresse da opportuni simboli.

La fama di cui gode Luca Pacioli è dovuta alla sua opera più importante, la *Summa de aritmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (1494, pubblicata a stampa a Venezia nel 1499). Tale lavoro può idealmente collegarsi con *Larte de labbacho* in quanto si tratta della prima opera enciclopedica di soggetto matematico data alle stampe ("ed a questa fortunata circostanza è in parte debitrice della sua immensa diffusione": Loria, 1929-1933, p. 276). In essa troviamo riferimenti, talvolta espliciti, a molti scrittori matematici precedenti (da Fibonacci agli algebristi arabi) e dunque l'opera non può dunque essere considerata interamente originale. Alcune tecniche presenti nella *Summa* sono però interessanti e rivelano la considerazione di Pacioli per i problemi classici della matematica del Quattrocento; troviamo ad esempio l'equazione (modernamente) espressa da:

$$x^4+2x^3+3x^2+2x = 81\ 600$$

Pacioli ne indica la risoluzione seguente:

$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1 = 81\,601 \quad \Rightarrow \quad (x^2+x+1)^2 = 81\,601 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+x+1 = \sqrt{81\,601} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}+\sqrt{81\,601}}$$

"considerando solo la radice aritmetica del secondo membro, come era consuetudine del tempo" (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 77-78; segnaliamo inoltre: Maracchia, 1979, p. 35). Notiamo tuttavia che un metodo generale per la risoluzione dell'equazione di quarto grado apparve solo alcuni decenni dopo la pubblicazione della *Summa* nell'opera di Cardano ([6]).

Il nome di Luca Pacioli è inoltre ricordato per *De divina proportione* (1509), un lavoro in tre parti nel quale viene studiata ed applicata la sezione aurea. La prima parte di tale opera, le cui meravigliose illustrazioni sono quasi certamente opera di Leonardo da Vinci, è però l'unica che merita l'attenzione dello storico della matematica; la seconda parte si riduce ad un trattato di architettura ispirato da Vitruvio. La terza parte dell'opera, certamente assai meno gloriosa per Pacioli, altro non è che la riproposizione di un precedente lavoro di Piero della Francesca sui poliedri regolari (Bagni & D'Amore, 1994) ([7]).

Luca Pacioli, dunque, non può essere considerato propriamente un grande ricercatore; il giudizio di U. Bottazzini è chiaro:

> "Pur lontana dalla profondità delle pagine di Leonardo Pisano, la *Summa* si presentava come un corpo di conoscenze imponente, che aveva ben presto fatto dimenticare la prima opera a stampa di carattere matematico, l'anonima *Aritmetica di Treviso*" (Bottazzini, 1990, p. 3).

Dunque *Larte de labbacho* superata e spodestata dalla *Summa*? Certamente sì, se guardiamo al contenuto matematico. Il valore de *Larte de labbacho* non può e non deve essere ricercato nell'importanza o nell'originalità dei procedimenti presentati; il manuale trevigiano (al pari della *Summa* pacioliana) non si discosta infatti dal genere magistralmente tracciato, quasi tre secoli prima, dal *Liber Abaci*, ma indubbiamente non è caratterizzato dalla ricchezza e dalla preziosità concettuale del capolavoro di Fibonacci. L'interesse de *Larte de labbacho* per la storia della cultura si mantiene però notevole: esso è segnatamente riferito alle nuove possibilità di divulgazione derivanti, anche per l'aritmetica, dall'introduzione della stampa a caratteri mobili. Come abbiamo potuto constatare, nel manuale trevigiano è riportato un ampio spaccato della cultura matematica "pratica" medievale che, proprio grazie alla stampa, può raggiungere un numero sempre più elevato di lettori e di utilizzatori. Dopo la pubblicazione de *Larte de labbacho*, altri manuali di aritmetica pratica furono stampati in varie località europee: nel 1483, a Bamberg (Baviera) venne stampato un manuale dovuto ad Ulrico Wagner; nello stesso anno fu pubblicato a Padova l'*Algorismi tractatus* di Prosdocimo Beldomandi, e l'anno seguente un manuale di Pietro Borghi venne stampato a Venezia.

Possiamo concludere che per collocare storicamente *Larte de labbacho* è necessario soprattutto, dalla fine del XV secolo, guardare al passato, non verso il futuro: il manuale trevigiano rappresenta il punto d'arrivo di una tradizione matematica "pratica" medievale che va a concludersi (una tradizione che potremmo idealmente collocare tra il 1200 ed il 1400), non già il punto di partenza della nuova matematica rinascimentale. Per questa ragione al manuale trevigiano è più corretto accostare le figure dei matematici medievali, lasciando gli autori come Luca Pacioli (almeno in parte), Girolamo Cardano, Nicolò Fontana Tartaglia e Rafael Bombelli, i grandi interpreti dell'algebra italiana, alla nuova grande matematica che, partendo dall'esperienza rinascimentale, porterà alla geometria analitica di Descartes e di Fermat fino alla nascita del calcolo infinitesimale di Newton e di Leibniz.

Appendice

Matematici medievali operanti tra il 1200 e il 1400

Riportiamo, ovviamente senza pretese di completezza, un sommario dei principali matematici medievali operanti tra il 1200 e il 1400.

ALESSANDRO di Villedieu (prima metà del XIII secolo).
Autore del *Carmen de algorismo*, contribuì alla diffusione della notazione indo-araba in Europa.

ALFONSO X, re di Castiglia (1221-1284).
Autore delle *Tavole astronomiche*. Fece tradurre in latino numerose opere scientifiche arabe.

ANDALÒ de' Negri, o Andalò Genovese (1270? -dopo il 1342).
Astronomo, fu autore dell'*Astrolabio*, che sarà stampato a Ferrara nel 1475.

BACONE Ruggero (1219?-1292?)
Astronomo e matematico inglese. Scrisse di prospettiva e di alchimia.

BACONIO Ruberto, Grossatesta (1168?-1253).
Filosofo, teologo e matematico inglese, vescovo di Lincoln. Scrisse *Della Sfera*, *Somma numerale*, *Del computo ecclesiastico*.

BARLAAM (1290-1348).
Monaco calabrese, si occupò di geometria (alcune sue annotazioni sugli *Elementi* euclidei furono riprese da Commandino), di aritmetica e di astronomia.

BONATTI Guido o Guido Bonato (primo ventennio XIII secolo-1296 o 1298).
Astronomo fiorentino, inserito da Dante nel XX canto dell'Inferno.

BRADWARDINE Thomas (1290?-1347 o 1349).

Arcivescovo di Canterbury, autore di alcuni lavori tra cui spicca il trattato *Geometria speculativa* in quattro libri. Le sue ricerche sui poligoni stellati furono in larga parte riprese dalle considerazioni di Boezio.

BRIENNIO Emanuele (ultimo terzo XIII secolo-primo terzo XIV secolo).
Bizantino, autore di *Armonika*, fu prevalentemente studioso di teoria musicale.

CAMPANO da Novara, Maestro Campano (prima decade XIII secolo-1296).
Fu autore dei trattati *Computo* e *Sphaera* ed importante editor degli *Elementi* di Euclide.

DACO Pietro, Petrus Philomeni de Dacia (fine XIII secolo).
Filosofo, astronomo e teologo. Studiò a Parigi ed operò in Danimarca. Commentò alcune opere del Sacrobosco.

FIBONACCI Leonardo Bigollo da Pisa (1180?-1250?).
Il maggior esponente della matematica medievale in Europa; nel 1202 pubblicò il *Liber Abaci*. Altre opere: *Practica Geometriae*, *Liber quadratorum*, *Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et ad geometriam, vel ad utrumque pertinentium*, *De modo solvendi quaestiones avium et similium*, un commento sul decimo libro degli *Elementi* di Euclide ed un lavoro intitolato *Libro di merchatanti detto di minor guisa*.

GHERARDO da Sabbioneta (Gherardo Cremonese, seconda metà XIII sec.).
Astronomo, autore di *Theorica planetarum* che per qualche tempo fu opera ritenuta classica; gli sono attribuite alcune traduzioni dall'arabo.

GIOVANNI di Bartolo, Maestro Giovanni (seconda metà XIV secolo).
Discepolo di Antonio de' Mazzinghi, ne rilevò la scuola di aritmetica pratica.

GIOVANNI di Sassonia, Giovanni Dank o Danck (prima metà XIV secolo).
Filosofo ed astronomo, studiò a Parigi e scrisse i *Canoni de l'Eclissi* ed il *Libro de l'Astrolabio*.

GIOVANNI Eligerio (attivo intorno al 1357).
Teologo, filosofo ed astronomo tedesco, discepolo di Giovanni di Sassonia. Fu autore di alcune opere astronomiche.

GIOVANNI Estuido, Eschenden (prime decadi XIV secolo-1370?).
Filosofo, teologo ed astronomo inglese, autore della *Somma Anglicana* (1347).

GIOVANNI Lignerio (prima metà XIV secolo).
Filosofo ed astronomo tedesco, fu lettore dello Studio di Parigi. Scrisse numerose opere astronomiche, tra le quali si ricordano *Canoni del Primo Mobile*, *Della Sfera*, *De le Tavole*.

GIOVANNI Gmunde, Johannes de Gmunden (1380 o 1384-1442).
Astronomo e matematico austriaco, autore dell'*Algorithmus de minucijs phisicis*, opera che sarà stampata a Vienna nel 1515.

HENRICO di Langenstein o di Assia (1325 o 1340-1397).

Filosofo, teologo e matematico tedesco. Autore *di Teoriche dei pianeti.* Insegnò matematica presso lo Studio di Vienna.

ISACIO Monaco, Isaak Argyros (1310?-1371?).
Matematico, astronomo e studioso di musica bizantino, scrisse gli *Scholia in Euclides Elementorum geometriae sex priores libros*, opera che sarà stampata a Strasburgo nel 1579.

LEVI ben Gerson (prima metà XIV sec.).
Si impegnò nel tentativo di ridurre il numero dei postulati euclidei ed è ricordato come un lontano precursore delle geometrie non-euclidee. Scrisse lavori trigonometrici ed astronomici, in parte riconducibili all'impostazione tolemaica (con la notazione in frazioni sessagesimali); introdusse il teorema secondo il quale i lati di un triangolo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

MAZZINGHI Antonio, Maestro Antonio da Peretola (XIV secolo).
Scrisse di aritmetica. Morì a trent'anni.

NASIR-EDDIN (1201-1274).
Studioso di geometria, si impegnò nel tentativo di dimostrazione del quinto postulato euclideo. Clavio, Patrici e Cataldi ripresero le sue argomentazioni.

ORESME Nicola (1323?-1382).
Parigino, vescovo di Lisieux, si occupò dello studio delle proporzioni e pubblicò l'*Algorismus proportionum*. Ideò un primitivo sistema di coordinate e fu un precursore delle concezioni spaziali a più di tre dimensioni. Si occupò di procedimenti infiniti e diede la più antica dimostrazione della divergenza della serie armonica.

PAVOLO Geometra o Paolo dell'Abbaco (1281 -1373).
Fiorentino, studioso di astronomia, aritmetica e geometria. Scrisse le *Teoriche*.

PIERO d'Aliaco, Pierre d'Ailly (1350 -1420).
Teologo, filosofo e matematico francese, vescovo e cardinale, scrisse le *XIV questioni sopra la Sfera di Giovanni Sacro Bosco*.

PIERO dell'Abaco (XIII -XIV secolo).
Maestro di un figlio di Dante.

PIETRO Hispano, papa Giovanni XXI (1215?-1277).
Logico insigne, autore dei "dodici libelli" delle *Summulae Logicales*.

SACROBOSCO Giovanni di Halifax (prima metà XIII secolo).
Inglese, studiò ed insegnò a Parigi; autore della *Sfera*, testo fondamentale per l'insegnamento medievale e rinascimentale dell'astronomia.

SCOTTO Michele (seconda metà XII secolo-1236?).

Autore di *Liber Astronomicus* e di *Llber Physiognomiae*, commentò dal punto di vista filosofico la *Sfera* di Sacrobosco. Per le sue ricerche astrologiche, da alcuni ritenute magiche, fu inserito da Dante nel XX canto dell'Inferno.

VITELLIONE, Witelo (1230?-1275?).
Matematico e studioso di ottica, scrisse un apprezzato trattato di prospettiva.

Note

([1]) In Europa, nel Medioevo, anche prima dell'introduzione della stampa a caratteri mobili, furono pubblicati numerosi manuali, tra i quali non possiamo non citare il *Liber Abaci* di Fibonacci (Leonardo da Pisa, 1180?-1250), risalente al 1202. A Fibonacci è generalmente ricondotta la rinascita medievale degli interessi matematici e l'intro duzione in Europa della notazione numerica posizionale indo-araba, in sostituzione della notazione additiva in uso presso la quasi totalità dei popoli antichi (Veratti, 1860; Morelli & Tangheroni, 1994). Le cifre indo-arabe si diffusero rapidamente nell'Europa medievale anche grazie ad altri due autori operanti nella prima metà del XIII secolo: Alessandro di Villedieu, autore del *Carmen de algorismo*, e Giovanni di Halifax detto Sacrobosco, autore dell'*Algorismus vulgaris* (Picutti, 1977; Bagni, 1996, I e 1998).

([2]) Ci limitiamo a ricordare una segnalazione di G. Libri sull'opuscolo *Ars Numerandi* che sarebbe stato stampato nel 1471 (Deschamp & Brunet, 1878): ma non ci sono prove certe dell'esistenza di tale opuscolo.

([3]) Il capoluogo della Marca nel XV secolo poteva vantare, nel settore editoriale, un'antica e robusta tradizione artigianale: centocinquant'anni prima della pubblicazione de *Larte de labbacho*, Pace da Fabriano, indicato quale inventore della carta di lino, si stabilì nella città veneta (Michieli, 1958; G. Romano, nella presentazione della ristampa anastatica de *Larte de labbacho*, ricorda che ben sedici erano le tipografie operanti in Treviso nella seconda metà del XV secolo: Romano, 1969; si veda inoltre il *Catalogo dei libri stampati a Treviso nel secolo XV, disposti per ordine d'anni, giuntivi alcuni di stampatori trevigiani altrove impressi*, di F.S. Fapanni, Treviso, Biblioteca Comunale, ms. n. 1662). Un particolare conferma il ruolo di primo piano assunto dalla tipografia nella diffusione della cultura scientifica del periodo: alcune considerazioni sulle fasi lunari, riportate ne *Larte de labbacho*, sono riferite al "de cembrio del 1478": ciò fa pensare che la stesura degli ultimi capitoli avvenne contemporaneamente alla stampa delle prime sezioni del libro (Romano, 1969; Bagni 1994b e 1995).

([4]) Il più vasto lavoro di analisi critica de *Larte de labbacho* risale al 1862-1863 ed è dovuto a Baldassarre Boncompagni. La recente disponibilità di riproduzioni anastatiche de *Larte de labbacho* (Romano, 1969) è particolarmente importante, in quanto sono note pochissime copie dell' edizione originale del manuale: nel 1888, F.G. Pichi elenca soltanto otto copie originali de *Larte de labbacho* e sebbene tale valutazione sia da aggiornare, essa è sufficiente per affermare l' estrema rarità bibliografica dell'opera (Bagni, 1995).

([5]) B. Boncompagni osserva che nell'opera *Flos* (manoscritto incluso nel *Codice Ambrosiano*, E75 sup., carta 10) Fibonacci imposta un sistema di tre equazioni indicando le incognite con i termini "bursa", "dragma" e "res" (Boncompagni, 1854a, p. 17; Bagni, 1996, I).

([6]) Alcune parti della *Summa* di Pacioli sono storicamente rilevanti, anche nel campo delle matematiche applicate. Ricorda ad esempio G. Loria: "Il problema da lui trattato di 'dividere equamente fra due giocatori la posta nel caso in cui la partita venga interrotta' fa apparire il Pacioli (anche se il risultato da lui ottenuto non sembra oggi accettabile) come uno dei primi che si occuparono di teoria delle probabilità" (Loria, 1929-1933, p. 278).

([7]) Citiamo M. Kline: "Sebbene la *Summa* non contenga nulla di originale, questo libro e il *De divina proportione* ebbero un grande valore perché contenevano molto di più di ciò che veniva insegnato nelle università. Pacioli fece da tramite fra ciò che era contenuto nelle opere scolastiche e la conoscenza acquisita dagli artisti e dai tecnici. Ciò nondimeno, è molto significativo per giudicare gli sviluppi matematici dell'aritmetica e dell'algebra fra il 1200 ed il 1500 il fatto che la *Summa* di Pacioli, pubblicata nel 1494, contenga quasi niente di più del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, che è del 1202" (Kline, 1991, I, p. 278).

Bibliografia

Arrighi, G. (1982), La matematica in Piero della Francesca, *Atti del convegno internazionale sulla Madonna del Parto di Piero della Francesca*, Monterchi, 24 maggio 1980, Biblioteca comunale di Monterchi.

Bagni, G.T. & D'Amore B. (1994), *Alle radici storiche della prospettiva*, Angeli, Milano.

Bagni, G.T. (1989), L'Aritmetica di Treviso, D'Amore, B. & Speranza F. (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma, 27-34.

Bagni, G.T. (1994a), I metodi pratici di sottrazione nei manuali di Aritmetica, *La matematica e la sua didattica* 4, 364-373.

Bagni, G.T. (1994b), Numeri e operazioni nel Medioevo. Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478), *La matematica e la sua didattica*, 4, 432-444.

Bagni, G.T. (1995), Il primo manuale di matematica stampato al mondo. Larte de labbacho (Treviso, 1478), *Cassamarca*, 11, IX, 2, 77-82.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1998), *Dopo Larte de labbacho. Manuali di Matematica dal XV al XIX secolo*, Quaderni dell'Ateneo di Treviso, 8, Treviso.

Boncompagni, B. (1852), *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, Tipografia delle Belle Arti, Roma.

Boncompagni, B. (1854a), *Notizie intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Tipografia delle Belle Arti, Roma.

Boncompagni, B. (1854b), *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, Tipografia Galileiana, Firenze.

Boncompagni, B. (1862-1863), Intorno ad un trattato d'Aritmetica stampato nel 1478, *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei* , XVI, XVI.

Bortolato, Q. & Contò, A. (1985) Il carteggio inedito Boncompagni-Fapanni sull'Aritmetica di Treviso, 1478, *Studi Trevisani*, II, 4 (lettere in: Fondo Fapanni, Biblioteca Comunale di Treviso, VII, II, L).

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Burn, R.P. (1992), Irrational Numbers in English Language Textbooks, 1890-1915: Constructions and Postulates for the Completeness of the Real Numbers, *Historia Mathematica* 19.

Burton, D.M. (1988), *The History of Mathematics - An Introduction,* William C. Brown, Dubuque, Iowa.

Cajori, F. (1919) *A History of Mathematics,* Macmillan, New York.

Cajori, F. (1928-1929) *A History of Mathematical Notations*, I-II., Open Court, La Salle, Illinois.

Clawson, C.C. (1996), *Mathematical Mysteries: The Beauty and Magic of Numbers* Plenum Press, New York.

D'Acais F. & Porro, B. (a cura di) (1969), *L'Aritmetica di Treviso*, copia anastatica, Società Tipografica Cremonese, Roma.

Deschamp, P. & Brunet G. (1878), *Manuel du Libraire*, Supplement, I, Paris.

Federici, D.M. (1805), *Memorie trevigiane sulla tipografia del secolo XV per servire alla storia letteraria d'Italia*, Venezia.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.

Gullberg, J. (1997), *Mathematics: From the Birth of Numbers,* Norton, New York.

Ifrah, G. (1989), *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano.

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).

Kramer, E.E. (1970), *The Nature and Growth of Modern Mathematics.* Hawthorn, New York.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (Hoepli, Milano 1950; rist. anast.: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano 1979.

Marre, A. (1880-1881) Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres, avec un appendice, *Bullettino bibliogr. e st. sc. matem. e fis.* (Boncompagni), 1880-1881.

McCarthy, P.J. (1986), *Introduction to Arithmetical Functions.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

Menninger, K. (1969), *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

Michieli, A.A. (1958), *Storia di Treviso*, Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso (ried. a cura di G. Netto: Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso 1981).

Morel, A. (1742), *L'Arithmétique raisonnée*, Desaint-Saillant, Paris.

Morelli, M. & Tangheroni, M. (a cura di) (1994), *Leonardo Fibonacci. Il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, Pacini, Pisa.

Paulini a S. Josepho (P. Chelucci) (1767), *Institutiones Arithmeticae*, Occhi, Venezia (altra ed.: Severini, Napoli 1786).

Pereira, A. (1760), *Tratado de Arithmetica e Algebra*, Da Silva, Lisbona.

Pichi, F.G. (1888), *Di un nuovo esemplare dell'Abbaco di Treviso del 1478 posseduto dalla Biblioteca della Regia Università di Bologna*, Bologna.

Picutti, E. (1977), *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano.

Pincherle, S. (1920), *Gli elementi dell'Aritmetica*, Zanichelli, Bologna.

Rhodes, D.E. (1983), La stampa a Treviso nel secolo XV, Biblioteca Comunale, Treviso 1983.

Romano, G. (a cura di) (1969), *Larte de labbacho*, copia anastatica, Longo e Zoppelli, Treviso.

Rouse Ball, W.W. (1927), *Le Matematiche dall'antichità al Rinascimento*, Zanichelli, Bologna.

Rouse Ball, W.W. (1960), *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover, New York.

Scott, J. F. (1960), *A History of Mathematics*, Taylor & Francis, London.

Smith, D.E. (1924), The first printed Arithmetic, *Isis*, 6, 310-311.

Smith, D.E. (1958), *History of Mathematics*, Dover, New York.

Smith, D.E. (1959), *A source Book in Mathematics*, Dover, New York (McGraw-Hill, 1929).

Stillwell, J. (1997), *Mathematics and its History*, Springer, Berlin (quarta ed.; prima ed.: 1989).

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Swetz, F.J. (1987), *Capitalism & Arithmetic*, Open Court, La Salle, Illinois.

Tahta, T. (1985), On notation, *Mathematics teaching*, 112, 49-51.

Veratti, B. (1860), *De' matematici italiani anteriori all'invenzione della stampa* , Soliani, Modena (rist. anast.: Forni, Bologna 1980).