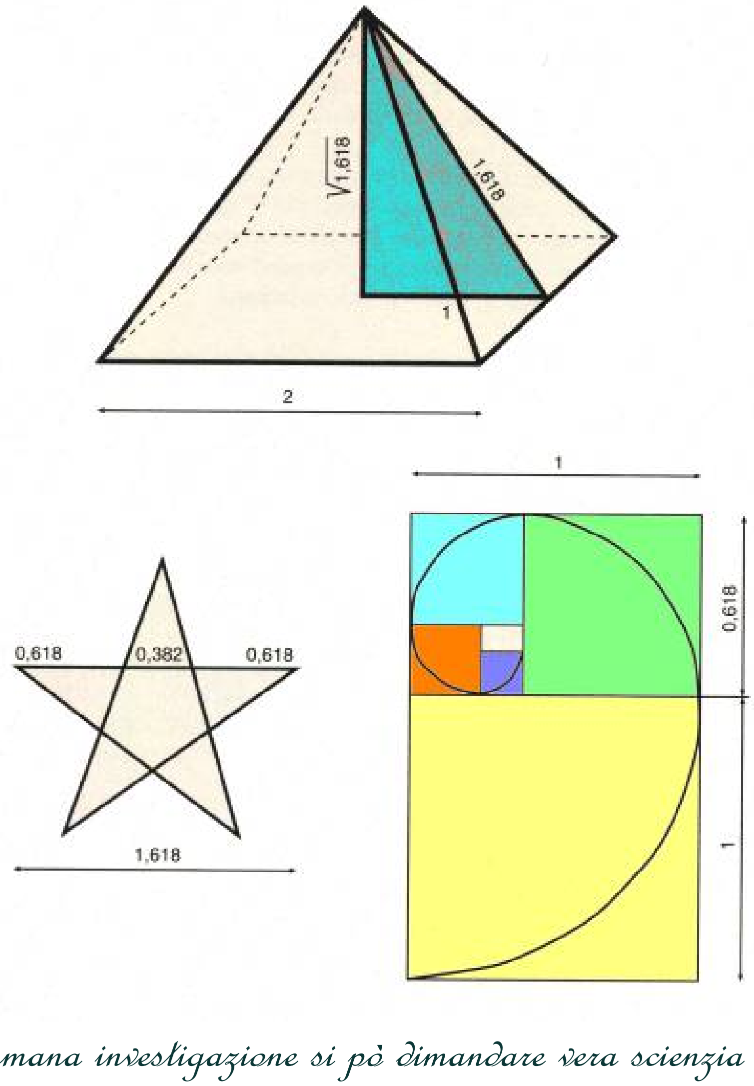
LA SEZIONE AUREA

"storia di Φ"

Patrizia Cassieri



"Nissuna umana investigazione si pò dimandare vera scienzia s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni, e se tu dirai che le scienzie, che principiano e finiscono nella mente, abbiano verità questo non si concede, ma si niega, per molte ragioni, e prima, che in tali discorsi mentali non accade esperienzia, sanza la quale nulla dà di sé certezza" Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

INDICE

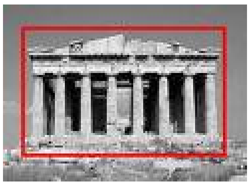
Bibliografia

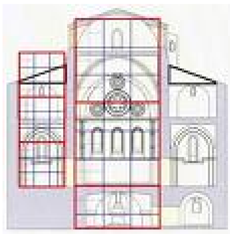
Mario Livio, *La sezione aurea* , Bur, Milano 2003
Boyer

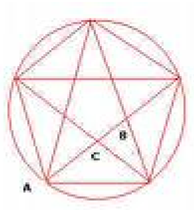
Introduzione

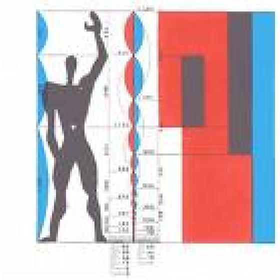
La Geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l' altro è la Sezione Aurea di un segmento.
Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d' oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.
(Johannes Kepler)

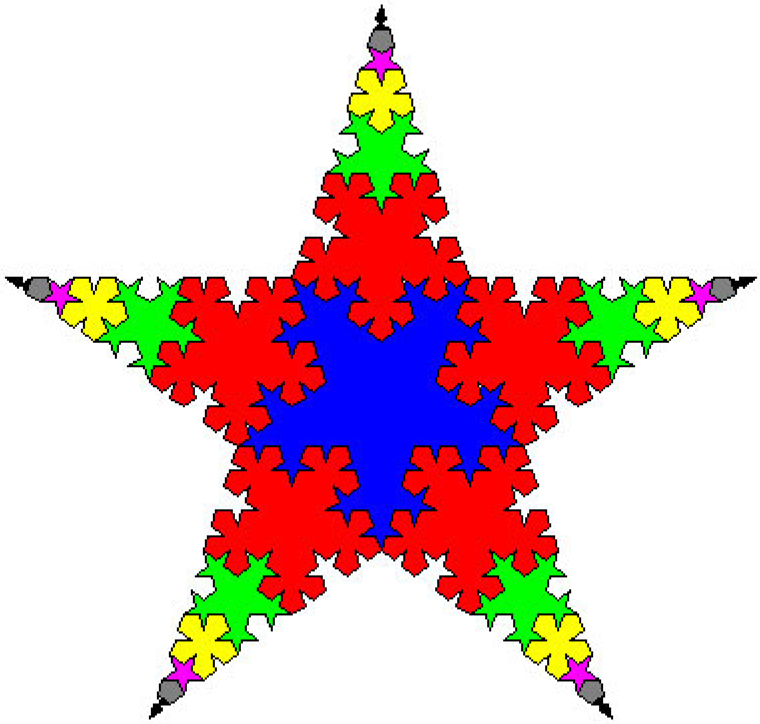
Il fascino del rapporto aureo dipende dalla sua propensione a comparire dove meno lo si aspetta.











Queste realtà così diverse condividono un numero, o una proporzione geometrica, noti fin dall'antichità e designati nell'Ottocento con una serie di definizioni che alludono all'oro, simbolo di ciò che è nobile, inalterabile e prezioso:
<< Numero aureo>>, << Rapporto aureo>> e << Sezione aurea>>.

Un largo contributo alla conoscenza e alla divulgazione di questo metodo di suddivisione armonica è stato dato dal frate matematico **Luca Pacioli** (1445-1510), egli fu il primo ad esporre in modo chiaro e completo la "secretissima scientia" del numero d'oro in un trattato pubblicato nel 1509 dal titolo significativo: "De Divina Proportione“.

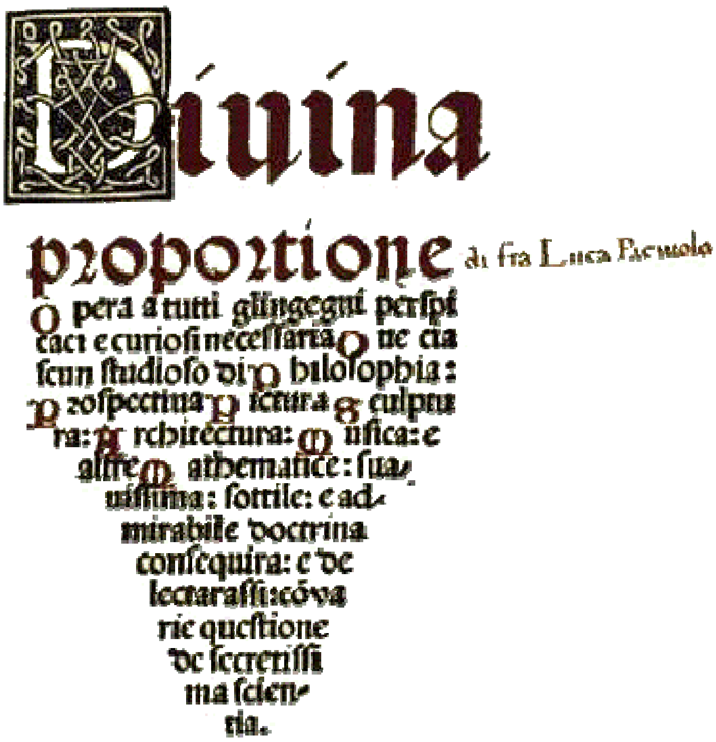
L’aggettivo **divina** si giustifica perché essa ha diversi caratteri che appartengono alla divinità:

è **unica** nel suo genere,

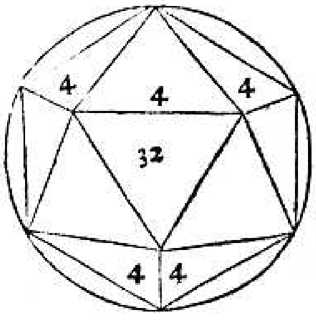
è **trina** perché sono necessari 3 segmenti per la costruzione,

è **indefinibile** in quanto è irrazionale,

è **invariabile**.

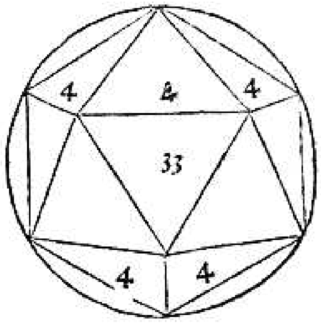


7¼.e ℞.7¼.e.c.d.⁊ la posança de.c.e.e.18¾.ch̄e il resto fine ad.36.si che.c.e. e ℞.de.18¾.⁊ tu voi.a.e.che po quãto.a.c.⁊.c.e.po multiplica .a.c.cioe cosi multiplica.6.m̄.℞.7¼.fa.43½.m̄.℞.1036¾.eq̃sto giogni con la posança de.c. e.che.18¾.fa.72.m̄.℞.1036¾.pero di che il lato del.20.base inscricto nella spe ra ch̄ il suo diametro e.12.sia ℞.de remanẽte de.72.tractone ℞.1036¾.



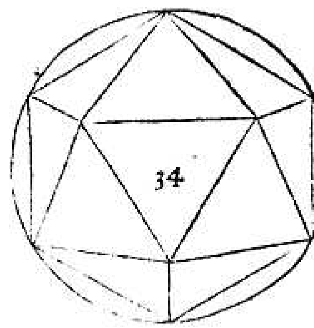
Casus .31.

Ato il.20.base triangulare equilatero che il lato de vna sua basa e.4.il diametro dela spera che il cõtene inuenire. ¶ Fa cosi fa vna linea che sia.a.b.⁊ diuidela per eq̃li in puncto.d.⁊ sopra.d.centro descriui il semicirculo.a. e.b.⁊ sopra.a.tira la perpendiculare.f.a.de la quantita che e a.b.da poi mena.f.d.che seghi la circũferentia.a.e b.in puncto.e.poi linea.a.e.che sia.4.che per la ꝓcedente e il lato del.20.base triangulari descricto in quella medesima spera da poi linea.e.b.dico che.a.e.⁊.e. b.gionte insiemi in directo cõpõgano vna linea diuisa in pũcto.e.secũdo la ꝓportione auente meçço ⁊ doi stremi ⁊ la magiore parte e.e.b.⁊.a.e.e.4. che la minore ⁊ e lato del.20.base triangulare ⁊ per la penultima del ṗmo de Euclide se ꝓua che la posança dela basa duno triangulo oposta alangulo recto e quãto la posança dele do linee che cõtengono lãgulo recto gionte isiemi. Et ꝑ ch̄ sa la linea cõposta a diuidere secõdo la ꝓportiõe auẽte meçço e doi stremi e la menore ꝑte e.4.di che la magiore sia.1.◊.⁊ tuta insiemi e.1.◊.e.4 nũero multiplica.1.◊.in se fa.1.□.multiplica.4.via.1.◊.e.4. fa.4.◊.e.16.nũero demeçça le.◊.sirano.2.multiplica in se fa.4.ponlo sopra il nũero che.16.fa.20.⁊ ℞.20.ꝑ.2.che fu il dimeççamẽto dele.◊.vale la ◊.che.e.b.adunqua.e.b e ℞.20.ꝑ.2.⁊.a.e.e.4.che po.16.multiplica ℞.20. ꝑ.2.via ℞.20.ꝑ.2.fa.24.ꝑ ℞.320.giognici la posançça de.a.e ch̄.16.fa.40.ꝑ. ℞.320.tanto e la posança de.a.b.ch̄ e diãetro dela spera che cõtene il corpo de.20.base triangulare equilatero cioe ℞.de la sõma che fa ℞.de.320.posta sopra de.40.e il diametro dela spera che e quello che se dimanda.



Casus .32.

L corpo de.20.base triãgulare equilatero che e per ciascuno suo lato.4.dela sua superficie reperire.
¶ Tu sai che ciascuna basa del.20.base triangulare eq̃latera ⁊ e.4.ꝑ lato ⁊ per trouare la sua superficie bisogna trouare il cateto de vna dele base. Tu ai per la prima del primo che il cateto de tale triãgulo e ℞.12.⁊ e sse dicto che a multiplicare il cateto per la meta de la basa neuene la superficie de tucto il triangulo che e vna de le.20.base del.20.base ꝓposto e tu voi la suꝑficie de.20.base adũqua piglia la meta de.20.ch̄ e.10.base ⁊ sai che ciascuna e.4.ch̄ fano.40.recalo a ℞.fa.1600.per che lai a multiplicare cũ ℞.12.multiplica.12.via.1600. fa.19200.⁊ la ℞.19200.e la superficie del.20.base triãgulare ch̄ il lato suo e.4.

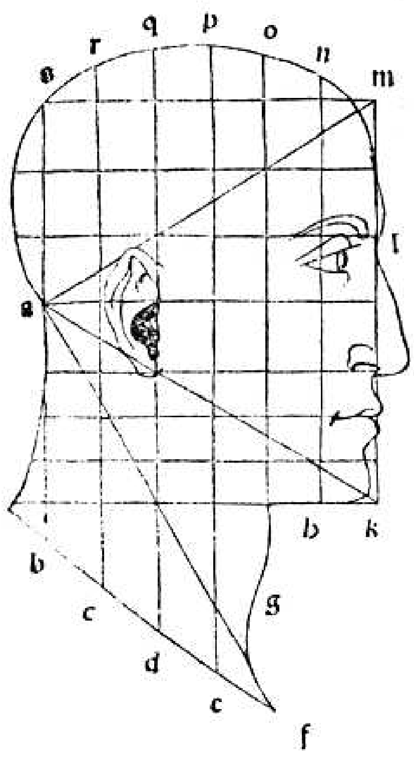


Casus .33.

El.20.base triangulare equilatero che la superficie sua e.200.quanto e il lato suo se vole cercare.
¶ Per la precedente se dicto che se il lato de vna basa e.4. che il cateto e ℞.12.e la superficie de q̃lla basa e ℞.48.cõmo ai per la secõda del ṗrio ⁊ hora ai che il.20.base e.200.pero parti.200.per.20.neuene.10.⁊.10.e superficie duna basa cioe ℞.100.Et per che la ꝓportione da superficie a superficie e doppia ala proportione duno duna superficie al lato de laltra superficie quãdo sono simili. Pero di se ℞.48.de superficie da.4.de lato ch̄ darã.10.de superficie reca.4.a ℞. de ℞.fa.256.Et reca.10.a ℞.fa.100.multiplica.100.via.256.fa.25600.il quale parti per.48.neuene.533⅓.⁊ la ℞.de la ℞.533⅓.di ch̄ sia per lato il.20.base triãgulari equilatere ch̄ la superficie sua e.200.

Casus .34.

L.20.base triãgulare equilatero che la superficie sua e.200.del diametro dela spera che il cõtene inuestigare.
¶ Ai per la precedente che il.20.base che a.200.de superficie



deli deti medii dele manĩ e quelle deli deti groſſi deli piedi che ſõno cõ
dictiõi reqſite ala vera diffinitiõe del cerchio poſta dal nr̃o Euclide nel
ꝑncipio del ſuo primo libro. La q̃drata ancora ſe hauera ſpanſi ſimilmẽte
le bracia ele gãbe e dale extremita deli deti groſſi de piedi ale ponti deli
deti medii dele mani tirãdo le linee recte in mõ che tanto ſia dala põta
del deto groſſo delũ de piedi alaltra põta delaltro pede quãto dalacia de
li deti medii dele mani a dicte põti deli deti groſſi deli piedi e tãto anco
ra aponto dala cima deli dicti deti medii dele mani da luno a laltro tirã
do la linea qñ adrito ben ſieno le bracia ſpãſi e tãto apõto ſia lalteçça o ṽ
longeçça de tutto lhomo ſtãdo ben formato e nõ mõſtruoſo che coſi ſem
pre ſe proſupone cõme dici el nr̃o. V. el ſuo nobiliſſimo mẽtro exteriore
cioe teſta ſe ben ſi guarda ſe trouera formata in ſu la forma dela ꝑma figu-
ra in le recte linee cioe triãgula eq̃latera dicta yſopleuros poſta per fonda
mento e principio de tutti li altri ſequẽti libri dal nr̃o Euclide nel primo
luogo del ſuo ꝑmo libro. ¶ Q ñ dixe triangulum eq̃lateꝝ ſupra datam li
neam rectã collocare. La qual coſa q̃ lochio nella pn̄te figura chiaro vel
dimoſtra. Se ben li cõtomi de tutta dicta teſta ſe cõſidera. Cõme vedete
el triangulo. a. m. k. delati eq̃li formato. E ſopra el lato ſuo. m. k. fatto el te
tragono longo. k. m. ſ. b. largo quãto el catheto. a. ala baſa. m. k. qual per
non ofuſcare el naſo cõlettara laſciai. Eq̃ſto lato. m. k. qual ſia tutto el frõ
teſpitio de dicta teſta ſia diuiſo in tre ꝑti equali nel ponro. l. e termino de
le nare del naſo. In mõ che tanto ſia. m. l. quanto dal. l. a dicte nare. E da
dicte nare al. k. piano del mẽto che cadaũa ſia la terça ꝑte del. m. k. Onde
dalinfimo dela fronte cauo del naſo. l. al ceglio fin ale radici de capelli.
m. cioe fin ala cima dela fronte ſia el terço de dicto lato. m. k. ſiche la ſua
fronte ſia aponto alta la terça ꝑte de tutta la teſta el naſo ſimilmẽte ne ſia
laltro terço. E da dicte nare fin al pian del mẽto. h. o ṽ. k. ne ſia vnaltro
terço. E q̃ſto vltimo terço ancora ſe diuide in tre altre ꝑti equali che luna
ne ſia dale nare ala bocca laltra dala bocca al cauo del mẽto la terça da di
cto cauo al pian del mento. k. I mmõ che cadauna ſia el nono de tutta
m. k. cioe el terço de vn terço bẽche el mẽto al q̃to deuii dal ꝓfilo dela facia
m. k. cõme vedi deſegnato in dicta figura la cui quantita a noi nõ e nota
preciſe ma ſolo q̃lla li egregii pictori lano dala natura reſeruata ala gratia
e albitrio delochio. E queſta ſia vna ſpẽ dele ꝓportioni irrationali qual
ꝑ numero non e poſſibile anominare. El ſimile ſe dici dela diſtantia dala
radice deli capellĩ ala fine de langulo. m. quale ancora al quanto da q̃llo
ſe diſcoſta cõme vedi che altramente nõ hauerebe gratia alochio. E la ꝑ-
pendiculare. a. o ṽ. catheto aponto ſia directe ala tomba del naſo e taglia
el ꝓfilo. m. k. nel meçço preciſe neli bñ ꝓportiõati e debitamẽte diſpoſti e
non monſtruoſi. E queſte ꝑti narrate finora al ſuo ꝓfilo tutte vengano a
eſſere rationali e a noi note. Ma doue interuene la irrationalita dele pro
portioni cioe che ꝑ alcũ mõ non ſe poſſono nominare per numero reſta
no al degno arbitrio del ꝓſpectiuo qual con ſua gratia le ha aterminare.
Peroche larte imita la natura quanto li ſia poſſibile. E ſe apõto larteficio
faceſſe q̃llo che la natura ha facto non ſe chiamaria arte ma vnaltra natu
ra totaliter ala prima ſimile che verebe a eſſere la medeſima. Queſto dico
acio non vi dobiate marauegliare ſe tutte coſe aponto non rñdano ale
mani delopefice peroche non e poſſibile. E di qua naſci che li ſauii dica
no le ſciẽ e diſcipline mathematici eſſere abſtracte e mai actualiter nõ e
poſſibile ponerle in eſſe viſibili. Onde el ponto linea ſuperficie e ognal
tra figura mai la mano la po formare. E benche noi chiamamo ponto q̃l
tal ſegno che con la ponta dela pẽna o altro ſtilo ſi facia non e quello ꝑo
põto mathematico da lui diffinito cõme nelle prime parolle deli ſuoi ele
menti el nr̃o Euclide diffiniſci quãdo dice. ¶ Pũctus eſt cuius pars non
eſt. E coſi diciamo de tutti li altri principii mathematici e figure douerſe
intenderle abſtracte dala materia. E benche noi li dicião ponto linea ꝛc.
Lo faciamo perche non habiamo vocabuli piu proprii a exprimer lor cõ

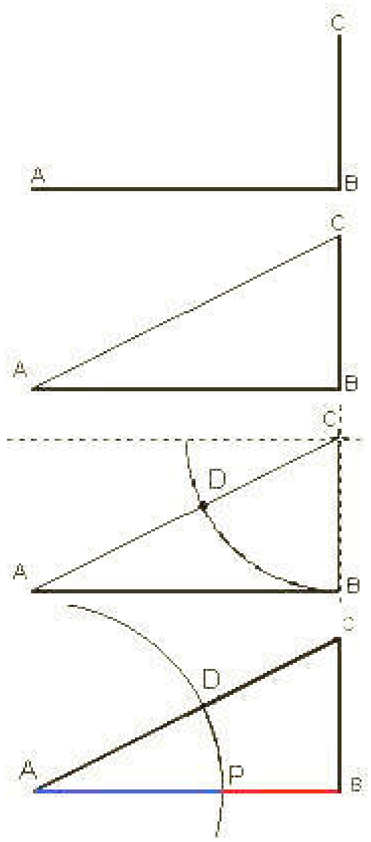
Definizione e costruzione della sezione aurea di un segmento

Definizione
La prima chiara definizione del rapporto <<aureo>> fu formulata, circa tre secoli prima di Cristo da **Euclide**, il matematico greco vissuto ad Alessandria fondatore della geometria in quanto sistema deduttivo.
Ecco cosa scrisse:
"***Si può dire che una linea sia stata divisa secondo la proporzione estrema e media quando l'intera linea sta alla parte maggiore come la maggiore sta alla minore***".

In termini più moderni
dato un segmento **AB** il segmento **AP** è la sua **sezione aurea** se **AB:AP=AP:PB** .

(a + b) : a = a : b

La costruzione di Erone

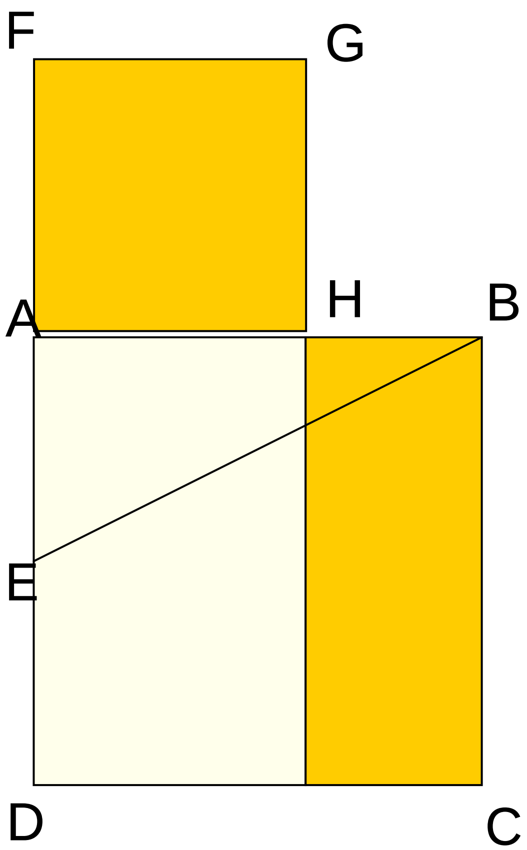


- **tracciare BC (perpendicolare al segmento AB - uguale a AB/2)**
- **unire l'estremo A con l'estremo C**
- **dal vertice C e con raggio CB determinare il punto D sul segmento AC**
- **dal vertice A e con raggio AD determinare il punto P**
- **AP è la sezione aurea del segmento AB.**

Nella proposizione II. 11 viene posto il seguente problema:

"*Dividere una retta data in modo tale che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente.*"

Premesso che con la parola *retta* Euclide intende *segmento di retta,* la costruzione geometrica del punto che divide il segmento dato nel modo richiesto è



Se AB *è* il segmento dato, su di esso si costruisce innanzitutto il quadrato ABCD.
Si congiunge poi il punto medio E di AC con il vertice B e sul prolungamento di AD si segna il segmento EF di lunghezza uguale ad EB.
Si costruisce quindi il quadrato AFGH.
Allora, H è il punto cercato, cioè: $AB \cdot BH = AH^2$.

Φ

Nella letteratura matematica specialistica, il simbolo consueto per indicare il rapporto aureo è la lettera greca <<tau>> dal greco *tomé* (taglio, sezione). Ma all'inizio del XX secolo il matematico americano Mark Barr ha introdotto l'uso della lettera greca phi (Φ), dall'iniziale del nome del grande scultore Fidia, vissuto tra il 490 e il 430 a. C.

Con la lettera Φ indichiamo il valore numerico del rapporto aureo.

Cerchiamo l'equazione che porta a Φ.

l rapporto aureo è il rapporto fra due segmenti di cui il più grande è medio proporzionale fra il più piccolo e la loro somma.

(a + b) : a = a : b

Poniamo ***a* = *x*** e ***b* =*1*** per semplicità avremo $(x+1):x = x:1$.
Ossia

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Le due soluzioni sono $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La soluzione positiva è proprio

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,989.$$

Φ è un numero irrazionale.

PRIMA curiosità

"La sezione aurea non è affatto banale
Tutt'altra cosa che un numero irrazionale.
Capovolta, pensate un po',
Resta1 se stessa meno l'unità.
Se poi di uno l'aumentate
Quel che ottenete, vi assicuro, è il quadrato."
Tratto dalla poesia '<u>Media costante'</u> di Paul S:Bruckman

…. e inoltre $-\frac{1}{\Phi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = x_2$.

SECONDA curiosità

Si immagini di tentare di trovare il valore della seguente espressione $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

Scriviamo $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ ed eleviamo al quadrato $x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$, ma il secondo addendo dopo l'1 è il nostro *x*.
Allora possiamo scrivere $x^2 = 1 + x$.
Ma questa è l'equazione del rapporto aureo!

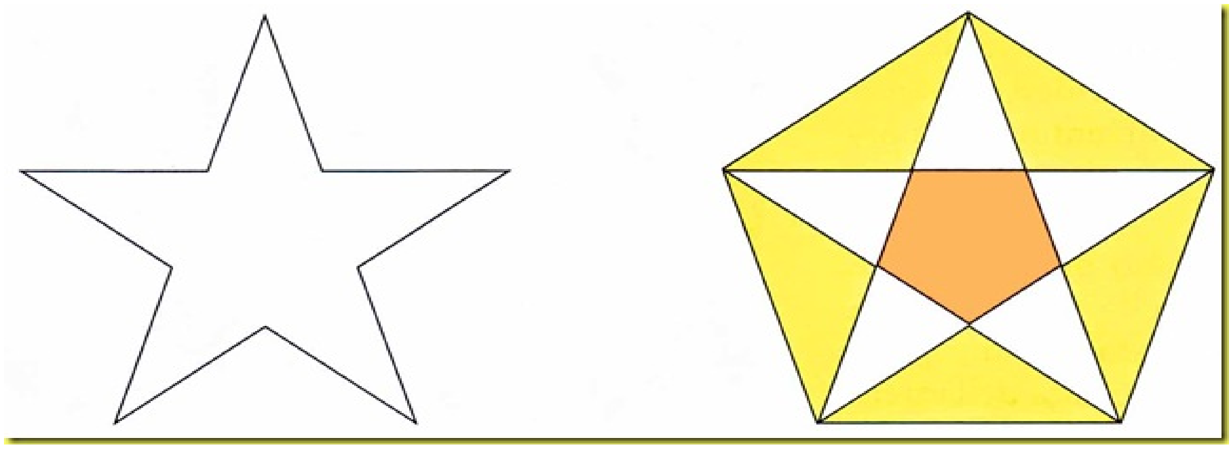
TERZA curiosità
Costruiamo una frazione continua

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ..}}}$$

Come calcolare il valore di questa frazione?
Poniamo $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+..}}}$, avremo $x = 1 + \frac{1}{x}$ e moltiplicando per x entrambi i membri ancora una volta $x^2 = x + 1$!!!!!!

LA STELLA A CINQUE PUNTE

L’interesse iniziale per Φ fu probabilmente ispirato alla sua relazione con il **pentagramma**.
Il pentagramma (dal greco pente, "cinque" e gramma, "linea") è una stella a cinque punte



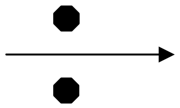
Un pentagramma può essere formato da un pentagono regolare capovolto o estendendo i suoi lati, o disegnando le sue diagonali, e la figura risultante contiene varie lunghezze correlate dalla proporzione aurea. Fu una forma geometrica molto cara ai pitagorici.

Il concetto che è alla base del principio pitagorico che le cose sono **numeri** è quello di un ordine misurabile. Affermare, come facevano i Pitagorici, che le cose sono costituite di numeri e che quindi tutto il mondo è fatto di numeri, significa che la vera natura del mondo, come delle singole cose, consiste in un ordinamento geometrico esprimibile in numeri (misurabile). Infatti, mediante il numero è possibile spiegare le cose più disparate dell'esperienza: dal moto degli astri al succedersi delle stagioni, dalle armonie musicali al ciclo della vegetazione. Per cui, anche ciò che sembra lontano dal numero risulta, a ben guardare, riconducibile ad una struttura quantitativa e quindi misurabile. E qui è veramente la grande importanza dei Pitagorici, che per primi hanno ricondotto la natura, o meglio il carattere che fa della natura qualcosa di oggettivo (di veramente reale), all'ordine misurabile; e hanno riconosciuto in quest'ordine ciò che da al mondo la sua unità, la sua armonia, quindi anche la sua bellezza. Ma se la sostanza delle cose è il numero, le opposizioni tra le cose si riducono ad opposizioni tra numeri. Ora il numero si divide in impari e pari: questa opposizione fondamentale si riflette in tutte le cose, quindi anche nel mondo nella sua totalità, e divide il mondo stesso in due parti, l'una corrispondente all'impari, l'altra al pari. In tal modo la filosofia dei Pitagorici e una filosofia dualistica. L'impari e il numero limitato (cioè terminato, compiuto) perché si identifica con lo gnomone che è una figura in sé compiuta, armonica. Il pari è invece illimitato, cioè non compiuto, non terminato. L'unità è detta parimpari, perché, aggiungendosi all'impari lo rende pari. All'opposizione dell'impari e del pari, del limite e dell'illimitato, corrispondono altre opposizioni nelle quali sempre l'ordine, il bene e la perfezione stanno dalla parte dell'impari.

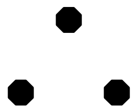
Ci sono così dieci opposizioni fondamentali:

1) Limite, illimitato.
2) Impari, pari.
3) Unita, molteplicità.
4) Destra, sinistra.
5) Maschio, femmina.
6) Quiete, movimento.
7) Retta, curva.
8) Luce, tenebre.
9) Bene, male.
10) Quadrato, rettangolo.

Questi opposti sono conciliati nel mondo da un principio di armonia.
Tutte le cose derivano dai numeri; tuttavia i numeri non sono il *primum* assoluto, ma derivano essi stessi da ulteriori «elementi». In effetti, i numeri risultano essere una quantità (indeterminata) che via via si de-termina o de-limita: 2, 3, 4, 5, 6... all'infinito. Due elementi risultano quindi costituire il numero: uno indeterminato o illimitato e uno determinante o limitante. Il numero nasce quindi «dall'accordo di elementi limitanti e di elementi illimitati», e, a sua volta, genera tutte le altre cose.
Ma proprio in quanto generati da un elemento indeterminato e da uno determinante, i numeri manifestano una certa prevalenza dell'uno o dell'altro di questi due elementi: nei numeri pari predomina l'indeterminato (e quindi per i Pitagorici i numeri pari sono meno perfetti), mentre nei dispari prevale l'elemento limitante (e perciò sono più perfetti).
Inoltre, i Pitagorici considerano il numero dispari come «maschile», e il pari come «femminile».
A parte i ruoli che assegnarono ai numeri pari e ai dispari in generale, i pitagorici attribuirono speciale proprietà ad alcuni numeri. L'1 era considerato il progenitore di tutti i numeri e che caratterizzasse la Ragione. Il due, primo numero femminile, era il numero dell'opinione e della divisione e rappresentato così

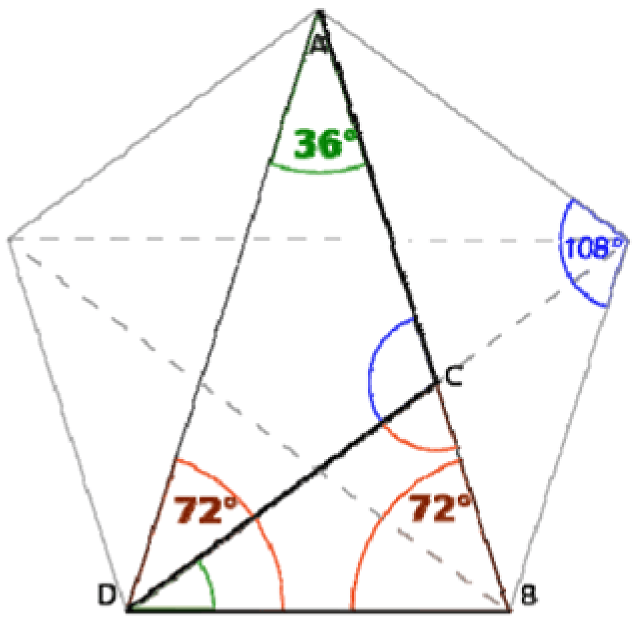


Il numero 3 ,primo numero maschile



Il numero 4 era il numero della giustizia. Il 6 era il primo numero perfetto perché $6 = 1 + 2 + 3$
è somma dei suoi divisori.
Il 5 era considerato l'unione del 2 e del 3, primo numero femminile con il primo numero maschile, e come tale numero del matrimonio e dell'amore. Sembra che i pitagorici avessero adottato il pentagramma 8 stella a 5 punte) quale simbolo della loro confraternita, e che lo chiamassero "Salute"
Il pentagramma è poi legato al pentagono regolare, il quale è strettamente correlato alla sezione aurea.
Infatti in un pentagono il rapporto tra la diagonale e il lato è proprio Φ.

Dunque la capacità di costruire una linea divisa secondo il rapporto aureo consente di costruire un pentagono regolare e da, questo, un pentagramma.



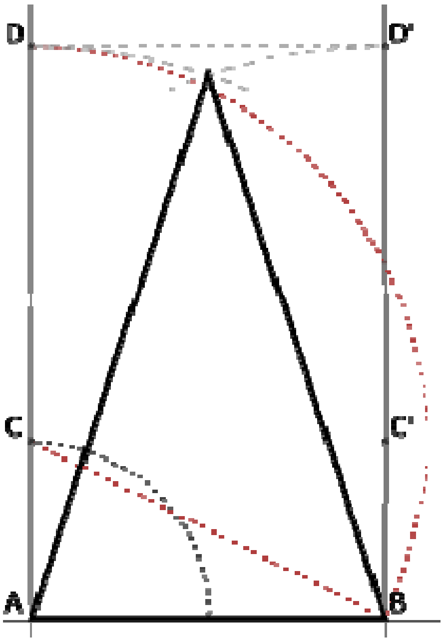
In un pentagono la somma degli angoli interni è 540°. Tracciamo due diagonali e ricaviamo tre triangoli isosceli.

Per il triangolo centrale abbiamo due angoli di 72° e uno di 36°(540°:5=108° e 108°:3=36°).

Questo è detto **triangolo** aureo che viene utilizzato per dimostrare che la diagonale del pentagono è in rapporto aureo col lato, e con l'aggiunta di altri due triangoli aurei, gli **gnomoni** aurei, ne completa la figura; inoltre si pensa che potrebbe essere perfino stato uno dei modi per la dimostrazione dell'incommensurabilità.

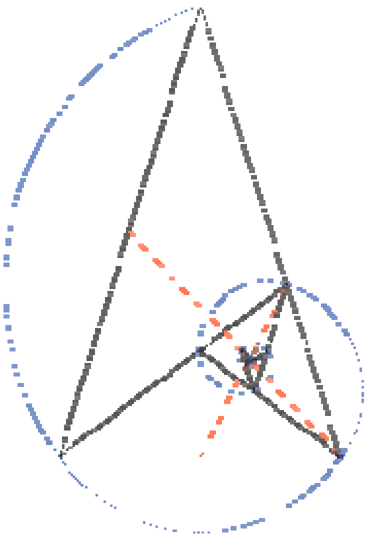
IL TRIANGOLO AUREO

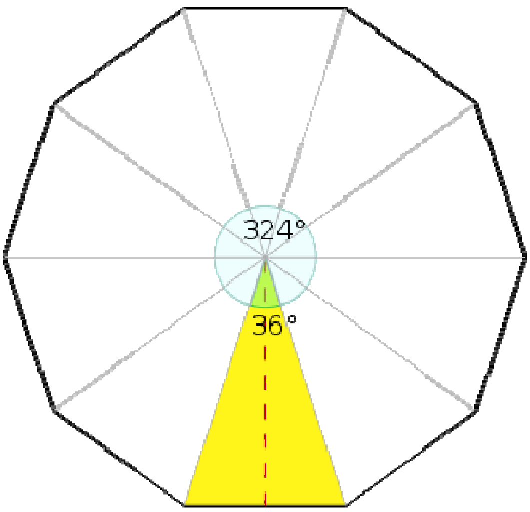
Per costruire un triangolo aureo su un segmento dato AB, si può procedere nel seguente modo:



Tracciare una perpendicolare passante per uno dei due estremi, in questo caso A, e riportarvi il punto C a una distanza pari la metà di AB;
Con centro in C, si riporta la distanza da questo all'altro estremo del segmento, CB, individuando il punto D;
Con centro in A si riporta la lunghezza totale trovata, AD, sulla mediana del segmento o la si fa incrociare con l'omologa dall'estremo opposto, designando il terzo punto della terna triangolare.
La spiegazione è rapida; innanzitutto si tratta di trovare un lato che sia in rapporto aureo con la base data e si riporta una metà di questa ½, a cui si aggiunge l'ipotenusa del triangolo CAB, calcolabile per mezzo del teorema di Pitagora:

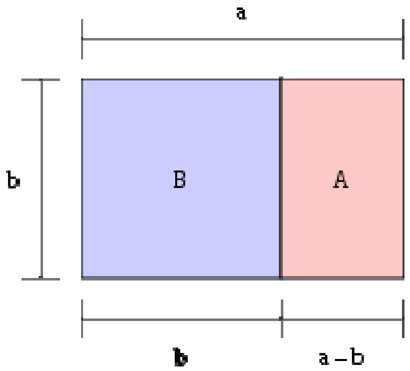
Il triangolo aureo ha molte proprietà in comune con quelle che sono più note come attribuite al rettangolo aureo. Per la sua caratteristica di avere gli angoli alla base di ampiezza doppia (72°) rispetto l'angolo al vertice (36°), è possibile, bisecando uno di questi, ricavare una successione infinita di triangoli aurei minori. Contestualmente alla successione di triangoli omologhi, viene anche prodotta una successione di gnomoni aurei di completamento, grazie ai quali è possibile tracciare una "spirale di **Fibonacci**", ovvero una spirale che approssima la spirale aurea autentica, tracciando in contiguità una successione archi di 108° di ampiezza, ovvero l'angolo al vertice dello **gnomone**.



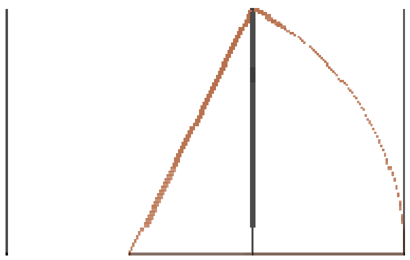


La "spirale di Fibonacci" in questione, come la spirale aurea vera, non ha mai fine, ma si "arrotola" attorno ad un punto asintotico, un sito all'incontri della mediane degli angoli alla base opposti rispetto quello verso cui punta il primo triangolo che possiamo trovare nella serie. Anche in questo punto si può registrare un parallelismo col rettangolo aureo, dove il punto asintotico si registra invece all'incrocio delle diagonale della successione di triangoli.
In relazione ad altri poligoni il triangolo aureo può essere segnalato anche nel dodecagono

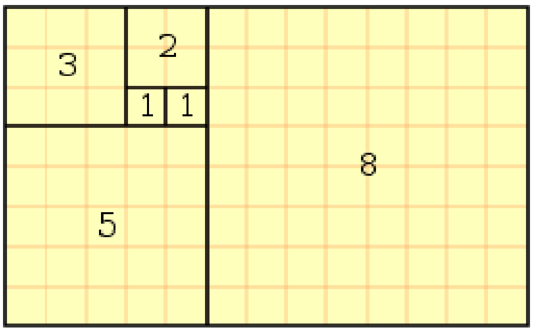
IL RETTANGOLO AUREO



Il rettangolo aureo è un rettangolo le cui proporzioni sono basate sulla proporzione aurea. Ciò significa che il rapporto fra il lato maggiore e quello minore, a : b, è identico a quello fra il lato minore e il segmento ottenuto sottraendo quest'ultimo dal lato maggiore b : a-b. (entrambi i rapporti sono $\Phi \cong 1{,}618$).
La particolarità saliente è la sua facile replicabilità: basta, infatti, disegnarvi, all'interno, un quadrato basato sul lato minore, o altresì, all'esterno, basato sul lato maggiore per ottenere col semplice compasso un altro rettangolo, minore o maggiore, anch'esso di proporzioni auree.
Le sue particolarità, nonché l'alone che già risiedeva attorno alla proporzione aurea, sulla quale è basato, l'hanno fatto considerare nei secoli un canone di bellezza assoluto; non sono mancate nell'800 persino indagini psicologiche volte ad avvalorare tale tesi, e nonostante successive verifiche l'abbiano del tutto privata di valore scientifico ancora oggi è diffusa l'idea che il rettangolo aureo sia il "rettangolo più bello".

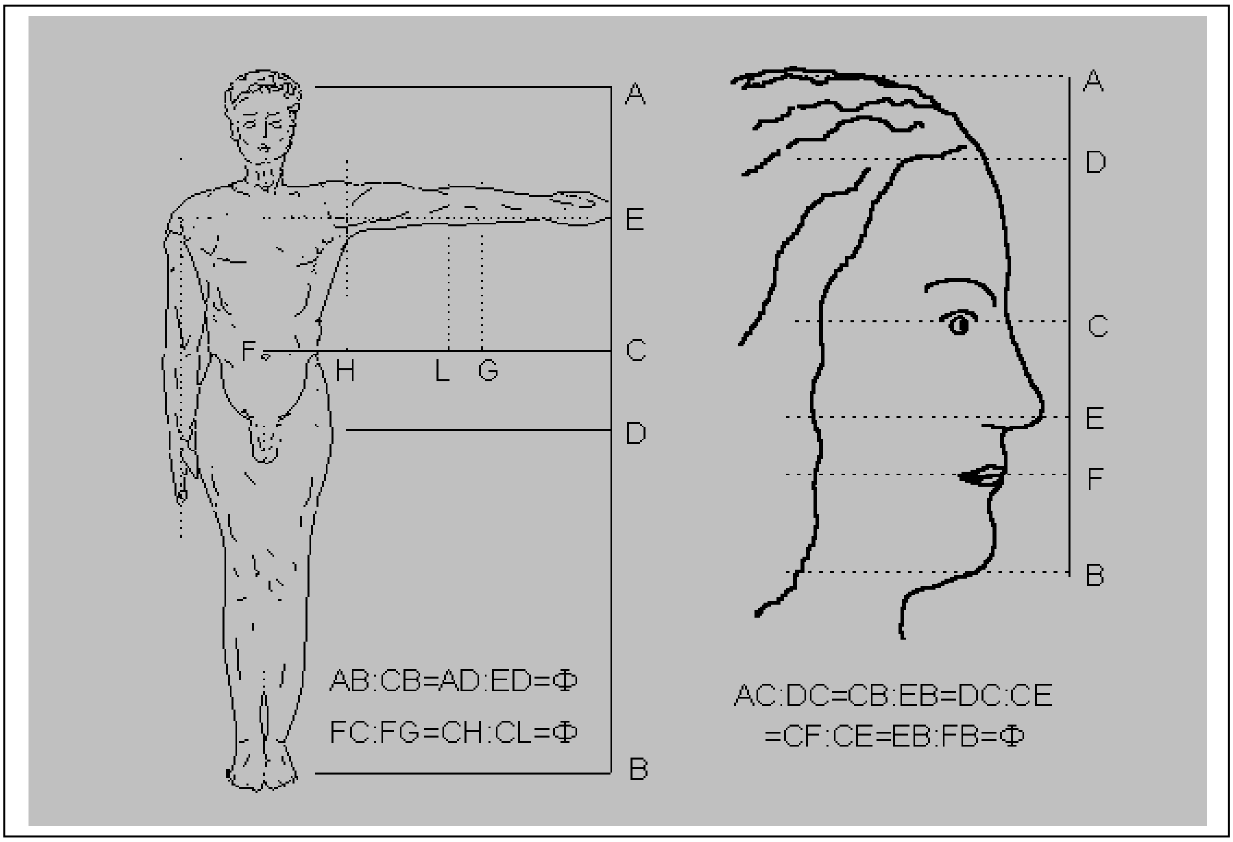


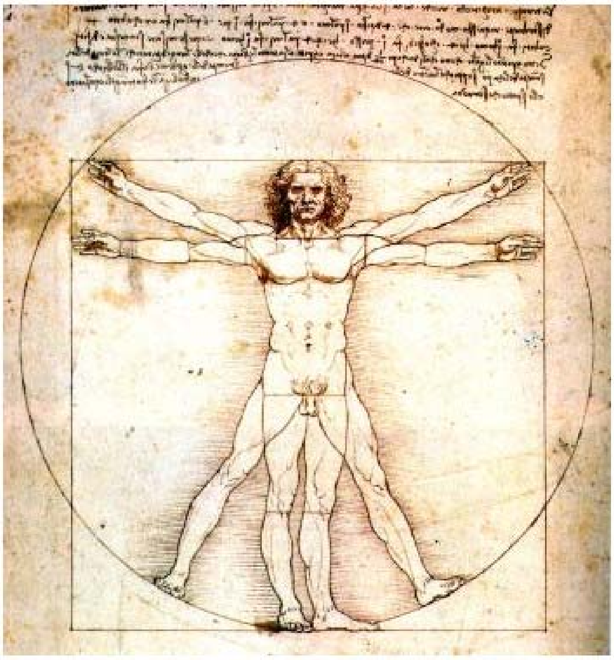
Il procedimento di costruzione del rettangolo aureo con il solo ausilio di riga e compasso è stato presentato per la prima volta da Euclide nella proposizione 2.11 degli elementi.
Si costruisce dapprima un quadrato, il cui lato corrisponderà al lato minore del rettangolo.
Si trova poi il punto medio di un lato e si punta su di esso un compasso con apertura sino a un vertice non adiacente del quadrato.
Il punto nel quale la circonferenza così determinata interseca il prolungamento del lato determina il secondo estremo del lato maggiore del rettangolo.



Un modo alternativo per costruire un rettangolo dalle proporzioni auree è quello di accostare in successione quadrati che abbiamo per lati i valori della successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...
In questo modo si creerà una successione di rettangoli sempre più vicini a quello aureo, ma è bene precisare che sarà sempre una approssimazione che non diventerà mai esatta: perché il rapporto aureo è un numero irrazionale, il che fa dei lati del rettangolo in esame due grandezze incommensurabili, per le quali, cioè, non esiste un sottomultiplo comune; come si vede dall'immagine il procedimento dei quadrati di Fibonacci crea invece lati sempre esprimibili tramite numeri interi, il che significa che il loro rapporto sarà sempre un numero razionale.
Vedi WIKIPEDIA

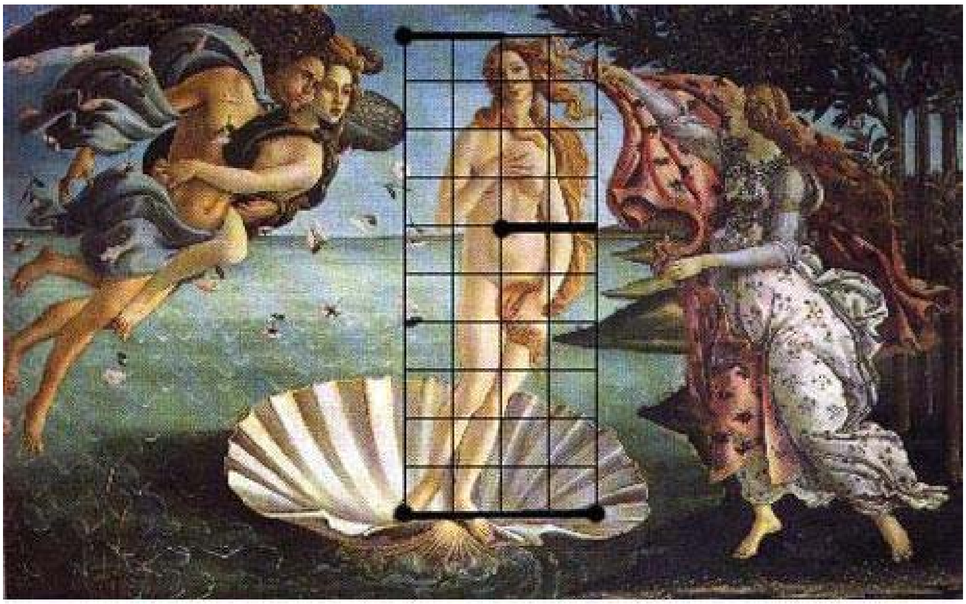
LA SEZIONE AUREA E IL CORPO UMANO





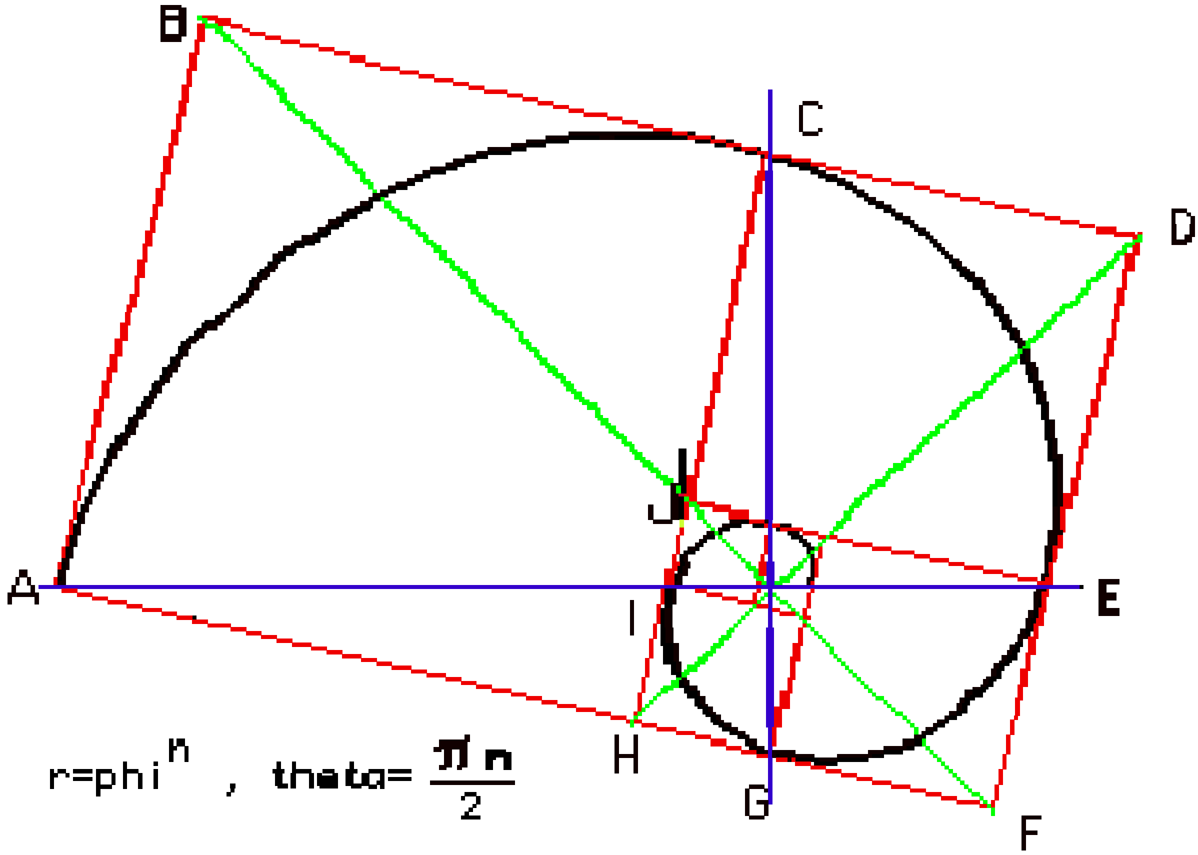
Famosa è la rappresentazione di Leonardo dell'uomo di Vitruvio in cui una persona è inscritta in un quadrato e in un cerchio.
Nel quadrato, l'altezza dell'uomo (AB) è pari alla distanza (BC) tra le estremità delle mani con le braccia distese . La retta passante per l'ombelico divide i lati AB e CD esattamente in rapporto aureo tra loro. Lo stesso ombelico è anche il centro del cerchio che inscrive la persona umana con le braccia e gambe aperte.

La posizione corrispondente all'ombelico è infatti ritenuta il baricentro del corpo umano.



Una famosa rappresentazione della figura umana in proporzioni auree è la di Venere di **Botticeli** nella quale si possono individuare diversi rapporti aurei (1:1,618) . Oltre all’altezza da terra dell’ombelico e l’altezza complessiva, è aureo anche il rapporto tra la distanza del collo del femore al ginocchio e la lunghezza dell’intera gamba o il rapporto tra il gomito e la punta del dito medio e la lunghezza dell'intero braccio.

LA SPIRALE AUREA



Dividendo il rettangolo in due parti secondo la lunghezza minore pari a 0,618 otterremo un quadrato e un rettangolo. Ebbene il rettangolo generato è simile al rettangolo originario ed è ancora un rettangolo aureo. Potremmo ripetere l'operazione teoricamente all'infinito e le proporzioni dei rettangoli generati restano invariate. Questa proprietà proporzionale è chiaramente emergente soltanto su un rettangolo generato da un rapporto aureo. Immaginiamo di andare avanti "all'infinito" e di unire i punti aurei (seguendo sempre lo stesso verso) con un curva che sia ogni volta tangente al segmento che tocca nel punto aureo. Quella che otterremo è una spirale logaritmica. La spirale logaritmica è una figura ricorrente in natura : alcune conchiglie, le galassie a spirale, la forma degli uragani sono solo alcuni esempi. Essa forse rappresenta una delle forme più eleganti esistenti nell'universo; la curva della spirale logaritmica si avvolge intorno al polo senza mai raggiungerlo. Il centro della spirale è all'infinito.

La spirale logaritmica è anche descrivibile mediante la sequenza dei numeri di Fibonacci (Pisa, 1180-1250), la sequenza si compone di una serie di numeri (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233…), posti in relazione in modo tale che ogni termine successivo è uguale alla somma dei due immediatamente precedenti. La particolarità è che il rapporto tra due termini successivi si avvicina molto rapidamente al numero decimale 0,618 che rappresenta il numero aureo.