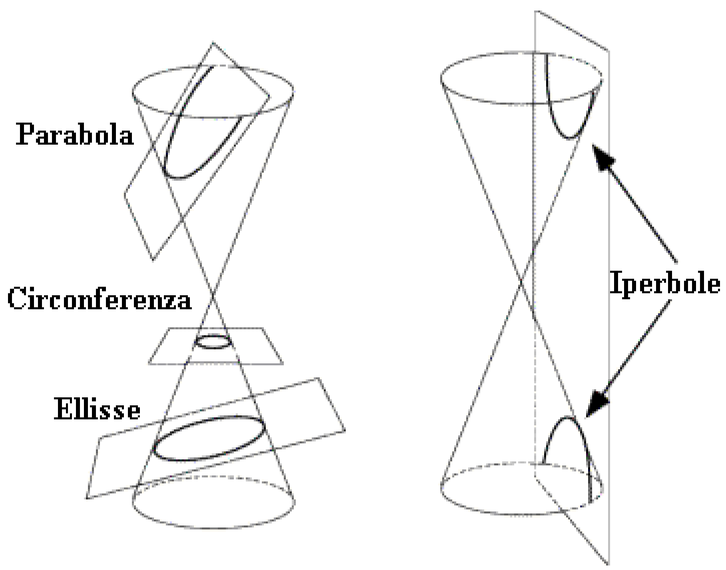
Liceo ginnasio statale “Terenzio Mamiani”, Roma

IL TRIONFO DELLE CONICHE



Docente: Patrizia Cassieri

Classe: 1°G

a. sc. 2010-2011

SCHEDA PROGETTO DI CLASSE

TITOLO: IL TRIONFO DELLE CONICHE
Finalità Il Laboratorio di matematica come “la bottega rinascimentale”
Classe coinvolta 1°G **Docente** Patrizia Cassieri **A. Sc.** 2010/2011
Luoghi e spazi Aula scolastica, Museo di matematica, laboratorio di informatica, officina

ATTIVITÀ in orario scolastico

1. Lettura dell’articolo di Piegiorgio Odifreddi “Oggi le coniche” da “LE SCIENZE” luglio 2010
2. Lettura del testo di C. Boyer “Storia della Matematica”
3. Visione del film “Agorà” di A. Amenàbar, 2009.
4. Studio delle coniche
5. Lavori di gruppo
   GRUPPO 1: Ricerca di informazioni e stesura testo su “Menecmo e Apollonio”
   GRUPPO 2: Ricerca di informazioni e stesura testo su “Ipazia”
   GRUPPO 3: Ricerca di informazioni e stesura testo su “Cartesio”
   GRUPPO 4: Ricerca di informazioni e stesura testo su “L’ellisse”
   GRUPPO 5: Ricerca di informazioni e stesura testo su “La parabola”
   GRUPPO 7: Ricerca di informazioni sulle Coniche in arte e in fisica e stesura testo “Dai principia alla realtà”
6. Assemblaggio dei vari testi per la costruzione di unico carteggio da lasciare in visione presso il laboratorio di matematica di questo liceo.
7. Allestimento di un nuovo spazio espositivo presso il museo di matematica della scuola con l’inserimento dei “tracciatori di coniche” costruiti dai ragazzi del GRUPPO 6.

ATTIVITÀ in orario extra-scolastico (12 ore)

Progettazione, studio e realizzazione di 3 tracciatori di coniche con l’intervento del dottor D. Urbani (vedi allegato)

MODALITÀ DI COMUNICAZIONE

Tradizionale lezione frontale, lettura da testi, siti web
Innovativa attraverso lo studio, la **costruzione** e la manipolazione di oggetti e attraverso la ricerca multimediale

TEMPI E MODALITÀ DI REALIZZAZIONE DEL PROGETTO

1) **Analisi** settembre, ottobre
2) **Individuazione** degli obiettivi, dei metodi e degli strumenti: settembre e ottobre
3) **Elaborazione** da ottobre a giugno
4) **Prodotti finali** testo “Il trionfo delle conche” e tre tracciatori di coniche.

DATA giugno 2011 **Patrizia Cassieri**

INDICE

PREMESSA

Lo studio delle coniche dal punto di vista analitico è parte integrante del programma di matematica della secondaria superiore. L'argomento permette di effettuare molti collegamenti – nella fisica (meccanica, ottica, astronomia), nella storia dell'arte e nelle numerose applicazioni tecnologiche.

La costruzione di esse sia con riga e compasso, sia con la realizzazione di macchine matematiche è un esercizio didattico che consente di"**mostrare**" e non solo di "**dimostrare**".

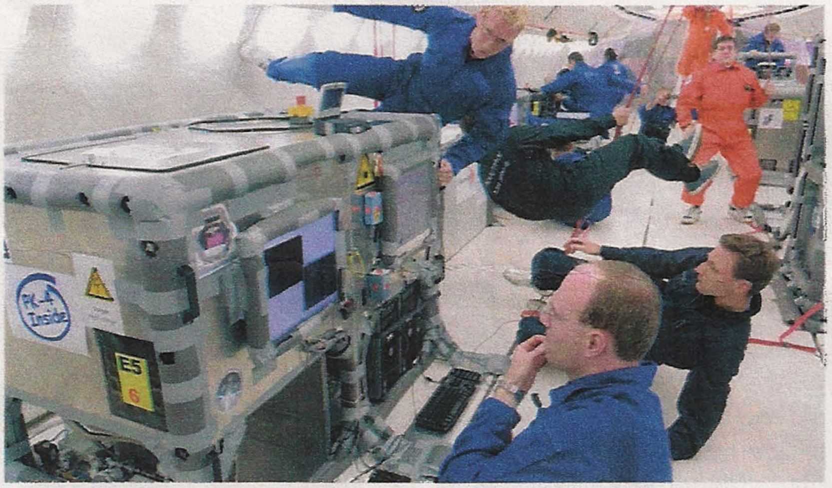
L'argomento è anche di grande attualità come scrive P. Odifreddi nel suo articolo "OGGI LE CONICHE"su Le Scienze, luglio 2010.

Oggi le coniche

di Piergiorgio Odifreddi
professore ordinario di logica matematica all'Università di Torino e visiting professor alla Cornell University di Ithaca (New York)

Delle varie applicazioni delle sezioni coniche, nessuna è stata tanto spettacolare quanto quella che si è avuto nella meccanica del Seicento. Quasi simultaneamente, a 2000 anni dalla loro scoperta, la parabola e l'ellisse fecero la loro entrata trionfale nella nuova scienza.

Da un lato, nel 1609 Galileo annunciò le leggi della balistica, da cui si ricava che la traiettoria di un proiettile è parabolica. Si tratta di una legge approssimata, che vale solo supponendo la Terra piatta e l'accelerazione gravitazionale costante. Ma è una legge che si applica bene al mondo sufficientemente ristretto della nostra esperienza quotidiana, che ce ne dà quindi innumerevoli conferme: dai getti delle fontane ai rimbalzi smorzati delle palle, ai salti dei pesci nell'acqua. Dall'altro lato, sempre nel 1609, Keplero pubblicò nell'*Astronomia nova* le sue prime due leggi, che regolano il moto dei pianeti attorno al Sole. E la prima stabilisce che l'orbita non è circolare, come supponeva in prima approssimazione il sistema copernicano, ma ellittica, con il Sole in uno dei fuochi.



DAI PRINCIPIA ALLA REALTÀ. Passeggeri di un volo parabolico organizzato dall'Agenzia spaziale europea per simulare condizioni di assenza di gravità tipiche dello spazio.

A. Le Floc'h/ESA

Salendo sulle spalle di questi due giganti, nel 1687 Newton produsse la grande sintesi dei *Principia*. E scoprì che un'orbita a sezione conica richiede una forza gravitazionale inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Viceversa, una tale forza produce orbite a sezione conica: dunque non solo ellittiche, ma anche paraboliche o iperboliche, a seconda dei casi. Cioè, nella balistica, a seconda della velocità impressa a un proiettile. Un'applicazione antibalistica, invece, si ha quando si inverte la traiettoria di un proiettile. Per esempio, quando un aereo in volo spegne i motori, inizia una traiettoria ellittica (approssimativamente parabolica) di caduta libera, che dipende dalla direzione e dalla velocità con cui stava procedendo. Se gli si fa percorrere in direzione contraria esattamente la stessa traiettoria, con le stesse velocità istantanee, si annulla l'influsso della gravitazione. L'effetto è sfruttato dai «voli parabolici», che allenano gli astronauti alla condizione di assenza di gravità che incontreranno nelle missioni spaziali.

Per quanto riguarda i corpi celesti, l'esempio tipico di un'orbita ellittica è quello di un corpo di massa trascurabile attorno a un altro di massa dominante: per esempio un pianeta attorno al Sole, o un satellite attorno a un pianeta. Volendo tener conto delle masse dei due corpi, invece, entrambi si muovono su un'orbita ellittica attorno al loro comune baricentro. Anche le comete che ritornano periodicamente si muovono su orbite ellittiche, tanto più allungate quanto maggiore è il loro periodo. Quelle che non ritornano, invece, si muovono su orbite paraboliche, o quasi. Per ora non si sono registrati, nel sistema solare, esempi significativi di comete con orbite nettamente iperboliche, sebbene in teoria siano possibili.

Per trovarle, basta guardare al moto di particelle elettricamente cariche. Poiché la legge di Coulomb è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come quella gravitazionale, produce le stesse orbite, quando entrambe le particelle coinvolte sono libere e hanno carica opposta. Se invece una è tenuta ferma e un'altra le si dirige quasi contro, la particella in movimento cambia direzione, ma non velocità, seguendo un un'orbita iperbolica. Se le cariche sono opposte, la particella subisce un'attrazione, e segue un ramo di iperbole che passa dietro l'altra particella, ferma nel fuoco interno. Se invece sono uguali, la particella subisce una repulsione, e segue un altro ramo di iperbole, che passa davanti all'altra particella, ferma nel fuoco esterno.

Una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come la gravitazionale e l'elettromagnetica, non è l'unica in grado di produrre orbite ellittiche. Come notò Newton, lo stesso succede per una forza direttamente proporzionale alla distanza, tipica di un corpo ancorato a una molla, che si muova attorno a un punto. O di un pendolo che si muova nello spazio, invece che solo su un piano. In entrambi i casi la traiettoria è ellittica, ma con il centro di forza nel centro dell'ellisse, invece che in un fuoco. Una bellissima parabola sulle ellissi, alla quale si addicono commenti iperbolici...

INTRODUZIONE

Sembra che il primo ad occuparsi di coniche sia stato Menecmo (375-325 a.C.), matematico greco discepolo di Platone ed Eudosso e maestro di Alessandro Magno. Esse furono scoperte nel tentativo di risolvere con riga e compasso i tre famosi problemi: la trisezione dell'angolo, la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio.

Solo 150 anni più tardi troviamo nell'opera "Le Coniche" di Apollonio di Perga (262-190 a.C.), il *Grande Geometra*, la loro trattazione sistematica.
Anche la prima matematica della Storia, Ipazia di Alessandria (370- 415) si occupò di coniche e scrisse un "Commentario all'opera di Apollonio" (v. film "Agorà"di A. Amenàbar, 2009).

Pur risultando interessante dal punto di vista matematico e astronomico, lo studio delle coniche venne a lungo abbandonato.

Fu forse l'arte a "riscoprire" le coniche durante il Rinascimento e il Barocco. Nel Rinascimento le coniche si ritrovano nelle forme prospettiche di pittori e architetti. Nel Barocco la forma di ellisse compare a caratterizzare l'uso della linea curva.
Nel campo delle applicazioni ricordiamo che Galileo Galilei (1564-16429) dimostrò che il moto di un proiettile ha come traiettoria una parabola e che, nel XV secolo, lo studio delle Coniche di Apollonio fece da guida a Keplero (1571-1630) per la formulazione delle tre leggi sul moto dei pianeti

Grazie all'introduzione di nuovi metodi algebrici i risultati relativi alla proprietà delle coniche, ottenuti da Apollonio per via sintetica, verranno raggiunti circa 1800 anni più tardi da Cartesio e da Fermat .

CAPITOLO 1 *MATEMATICA*

1.1 Storia

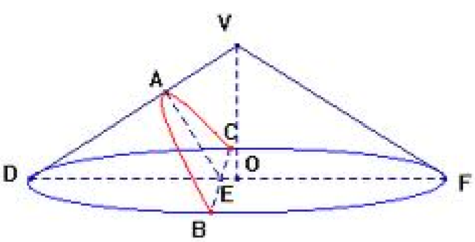
MENECMO ed APOLLONIO

di Lucilla Gazziano, Zoe Gabrielli e Matilde Samà

Menecmo (380 a.C. ca. – 320 a.C. ca.) è stato un matematico, studioso di geometria. Egli nacque probabilmente ad Apeconesso, località della Tracia che oggi fa parte della Turchia, ed è noto per la scoperta sulle sezioni coniche e per aver dato una soluzione a quello che allora era un annoso problema: la duplicazione del cubo. Ci sono poche fonti dirette sulle opere di Menecmo. Si sa in particolare della sua amicizia con il filosofo Platone e che fu maestro di Alessandro Magno. La leggenda gli attribuisce il celebre commento in risposta alla richiesta del suo regale discepolo di una scorciatoia per la geometria: "Mio re, per viaggiare attraverso il paese vi sono strade per re e strade per cittadini comuni: ma in geometria c'è un'unica strada per tutti".

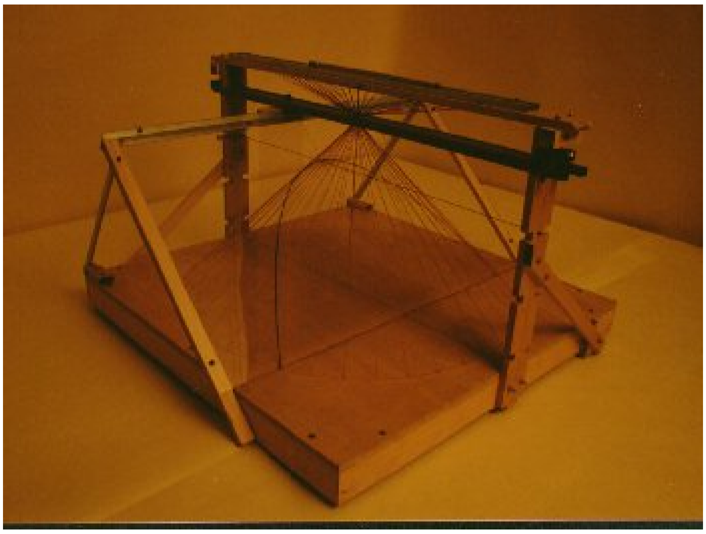
Egli studia le sezioni coniche ed è il primo a mostrare che ellissi, parabole ed iperboli si possono ottenere tagliando un cono con un piano non parallelo alla base. Si ritiene, in generale, che non sia stato Menecmo ad attribuire i nomi di parabola ed iperbole, ma Apollonio. Tuttavia, recenti scoperte riguardanti Diocle mostrano che i nomi di parabola e iperbole siano stati usati prima ancora di Apollonio.

Menecmo descrisse le coniche come ottenibili da un'unica origine, ossia tagliando un cono circolare retto mediante un piano perpendicolare a un elemento di cono. Menecmo trovò che, facendo variare la generatrice del cono stessa, allorché il cono viene tagliato da un piano perpendicolare a uno dei suoi elementi,si ottenevano delle curve di intersezione.



Le intersezioni di un cono circolare retto, con angolo al vertice α variabile ed un piano fisso π perpendicolare alla direttrice r del cono, a seconda che si abbia **α < 90°** ,

α = 90° oppure **α < 90°** sono rispettivamente un´ellisse, una parabola o un´iperbole.



Coni per le sezioni coniche (teoria di Menecmo-Euclide)

La teoria delle coniche (scoperte probabilmente da Menecmo)si sviluppò nella seconda metà del IV sec. a.C.; ma trattati specifici (Aristeo, Euclide) comparvero solo attorno al 300 a.C. I geometrici greci intendevano per coni i solidi generati da un triangolo rettangolo rotante attorno ad uno dei cateti (cioè coni circolari retti), li classificavano in coni rettangoli, ottusangoli o acutangoli a seconda del tipo di angolo formato nel vertice della sezione meridiana completa, e usavano ciascuna specie di cono per generare un solo tipo di conica. Infatti essi tagliavano ogni cono con un piano perpendicolare ad una generatrice e chiamavano le sezioni ottenute con i nomi seguenti (da Pappo attribuiti ad Aristeo): sezione di cono rettangolo = ***orthotome****, sezione di un cono acutangolo =* ***oxytome****, sezione del cono ottusangolo =* ***amblytome****. E' possibile dedurre il "sintomo" di ciascuna sezione del cono nello spazio a tre dimensioni .*

Menecmo scoprì le sezioni coniche mentre cercava di risolvere il problema della duplicazione del cubo,o problema di Delo. E' uno dei problemi classici dell'antichità. Si tratta di trovare il lato di un cubo che abbia il volume doppio rispetto a quello di un cubo dato. Il problema venne risolto da Menecmo, per via geometrica, con l'uso delle coniche. (vedere Carl Boyer, Storia della matematica).

Menecmo si è occupato anche di altre questioni: era sostenitore della teoria astronomica delle sfere omocentriche avanzata da Eudosso, si pensa che abbia studiato anche la struttura degli enunciati della matematica, dedicandosi alla logica ed alla distinzione fra teoremi e problemi.

Quando sia morto precisamente, non è certo; tuttavia gli studiosi contemporanei concordano nell'affermare che morì a Cizico

Ad **Apollonio di Perga** (Perga, 262 a.C. – Murtina) si deve la sistemazione razionale della trattazione delle coniche.

Durante il primo secolo dell'Età ellenistica tre matematici eccelsero: Euclide, Archimede e Apollonio.

Apollonio era noto come "il Grande Geometra". Si conosce molto poco della sua vita e anche la maggior parte delle sue opere è andata perduta.

Per tutto il periodo ellenistico la città di Alessandria rimase il centro degli studi matematici del mondo occidentale. Apollonio, però, come Archimede, non era nativo di questa città; era nato a Perga in Pamfilia (Asia Minore meridionale, attuale Turchia), ma non è escluso che abbia ricevuto la sua educazione scientifica ad Alessandria e che qui sia vissuto qualche tempo insegnando matematica al Museo (il nome Apollonio era molto diffuso e quindi nelle cronache veniva spesso confuso).

Per un certo periodo visse anche a Pergamo, dove c'era un'Accademia e una biblioteca che in ordine di importanza veniva immediatamente dopo quella del Museo di Alessandria. A Pergamo godette della protezione del generale di Alessandro, Lisimaco, e dei suoi successori. Di lui sopravvivono solo due opere:

- ***Separazione di un rapporto*** (due libri giunti a noi in una traduzione in arabo);
- ***Le coniche*** (opera in otto libri dei quali quattro sopravvivono nella versione greca originale e sette in traduzione araba, l'ottavo libro perduto, è stato ricostruito deduttivamente dallo scienziato arabo Alhazen).

Nel primo libro delle Coniche viene affrontato proprio il problema della generazione delle sezioni coniche.

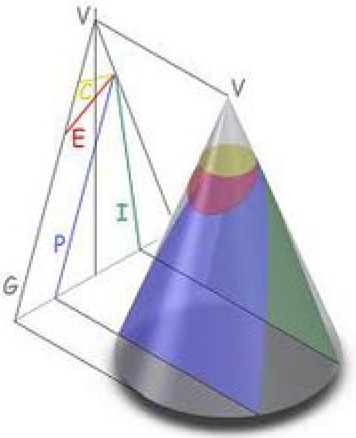
Nel secondo libro si affronta invece lo studio dei diametri coniugati (che portano poi, in casi particolari, al concetto di asintoto e possono essere visti come un primitivo sistema di riferimento) e delle tangenti.

Il terzo libro contiene la formulazione e la soluzione di quello che diverrà il Problema di Pappo, che viene poi generalizzato nel 1637 da Descartes. Il quarto libro descrive, usando le parole di Apollonio, "in quanti modi le sezioni coniche possono incontrarsi l'una con l'altra."

Il quinto libro tratta dei segmenti massimi e minimi che si possono tracciare rispetto ad una conica, che tradotto in termini moderni significa una trattazione sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche.

Nel sesto libro si affrontano i temi dell'uguaglianza e similitudine delle sezioni coniche, mentre nel settimo libro Apollonio torna sull'argomento dei diametri coniugati.

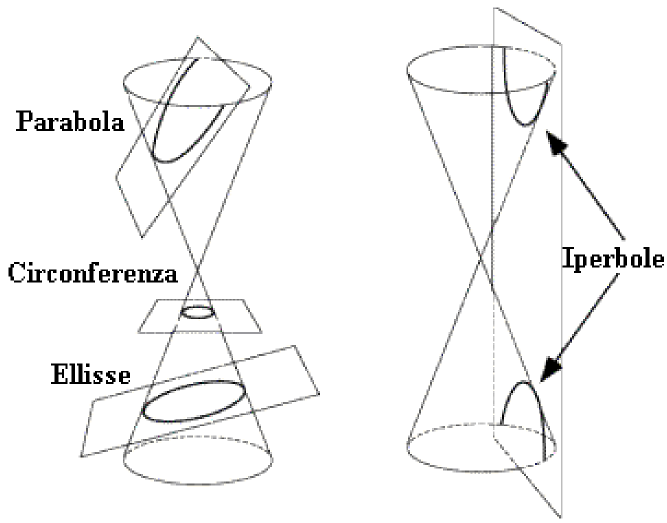
Prima di Apollonio l'ellisse, la parabola e l'iperbole, oltre a essere indicate con altri nomi, venivano costruite come sezioni di tre tipi nettamente distinti di coni circolari retti, a seconda che l'angolo al vertice fosse acuto, retto e ottuso.



Apollonio, a quanto pare per la prima volta, dimostrò che non era necessario prendere sezioni perpendicolari ad un elemento del cono, e che da un unico cono era possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni coniche semplicemente variando l'inclinazione del piano d'intersezione.

Una seconda importante generalizzazione si ebbe quando Apollonio dimostrò che non era necessario che il cono fosse un cono retto, ma che poteva benissimo essere anche un cono circolare obliquo o scaleno.

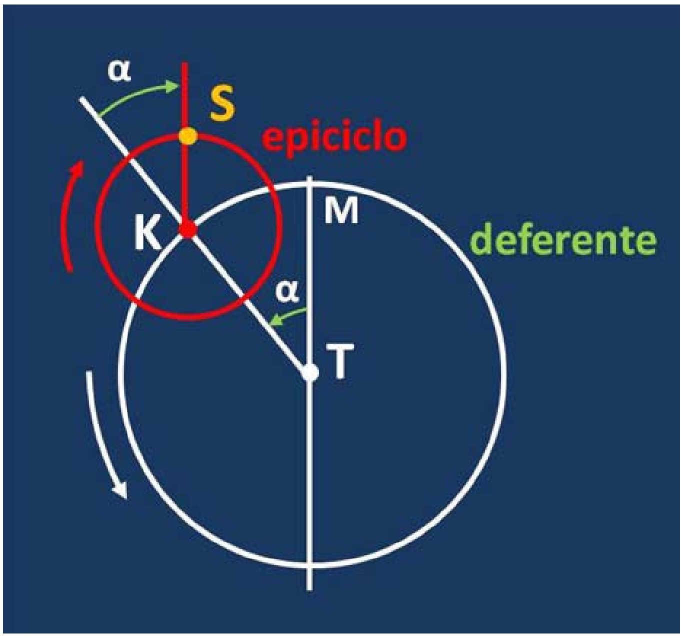
Infine, Apollonio avvicinò ulteriormente le antiche curve al punto di vista moderno sostituendo il cono a una falda con un cono a doppia falda.



Apollonio utilizzò le sue conoscenze geometriche anche per una applicazione pratica, la costruzione di una meridiana in cui l'ombra viene valutata su una superficie conica in modo da fornire una accuratezza maggiore delle meridiane con superficie piana.

Apollonio inoltre fornì un grande contributo all'astronomia greca, applicando modelli geometrici al moto dei pianeti. Apollonio capì che la diseguale durata delle stagioni avrebbe forse suggerito che l'anomalia solare poteva essere spiegata collocando il centro dell'orbita fuori del centro della Terra (ex-centro).Ciò avrebbe spiegato come poteva avvenire che, pur descrivendo il Sole l'eclittica a velocità costante e con orbita circolare, dalla Terra apparisse che il tratto di orbita dalla parte più vicina era percorso a velocità maggiore di quella a cui era percorso il tratto dalla parte opposta.

Apollonio, da grande matematico, introdusse una costruzione geometrica particolare, continuando ad obbedire completamente ai canoni risalenti alla scuola pitagorica e consacrati dalla fisica aristotelica, che dovevano essere conservati. Questi canoni astronomici possedevano una intima valenza trascendente che andava ben oltre la loro semplice apparenza geometrica: erano i "fenomeni da salvare", cioè: (1) l'orbita solare è un cerchio, (2) la Terra, essendo centro del cosmo, deve essere centro di questo cerchio e (3) la velocità del Sole su questo cerchio deve essere costante.



Il Sole si muove con un periodo di un anno su un cerchio perfetto con moto uniforme ed in senso orario, detto epiciclo, il cui centro K circola a sua volta, in senso antiorario, con moto uniforme e con lo stesso periodo di un anno, su un altro cerchio, detto deferente, che ha per centro la Terra.

Secondo Apollonio, dunque, il Sole circola con periodo di un anno, con moto uniforme e in senso orario su un cerchio, detto epiciclo, il cui centro circola a sua volta, in senso antiorario e con lo stesso periodo di un anno, su un altro cerchio, detto deferente, centrato nel centro della Terra. Vengono così conservati i principi base: cerchi perfetti, moti uniformi e Terra al centro.

Comunque, già al tempo di Apollonio le Coniche trovavano applicazioni pratiche nella cartografia.

Pur risultando interessante dal punto di vista matematico, lo studio delle coniche per i Greci aveva scarsi interessi pratici e venne abbandonato per un lunghissimo periodo…..

IPAZIA

di Nadia Abu Sarah e Arianna Ruda

Non sono poi tante le donne che hanno avuto la possibilità di distinguersi nella scienza (e purtroppo non solo nella scienza), considerata, fino a non molto tempo fa, appannaggio esclusivo del mondo maschile. Molte hanno dovuto pagare con la vita questa loro passione, quasi fosse una colpa della quale vergognarsi: una donna che con le sue ricerche potesse superare o peggio inficiare i risultati ottenuti dai colleghi maschi, era ritenuta una presuntuosa da relegare in un angolo.

Fra queste non si può dimenticare **Ipazia**, la quale nacque ad Alessandria in Egitto nella seconda metà del IV secolo. Nulla si sa della madre e si ipotizza l'esistenza di un fratello. Molto importante invece è stata la presenza del padre Teone nella sua vita, studioso di grande spessore, il quale la istruì e la indirizzò alla scienza.

Gli studi

Ipazia fu una grande studiosa di matematica e anche insegnante. Ipazia fu inoltre filosofa molto apprezzata: Socrate Scolatico parla di lei come della terza caposcuola del Platonismo, dopo Platone e Plotino. Ma scienza e filosofia non devono poi considerarsi discipline separate, è maestra di filosofia neoplatonica, una disciplina dove convergevano anche studi di matematica e di geometria, al punto che la stessa Ipazia avrebbe inventato anche macchine come un idroscopio e un aerometro.

Si interessò molto anche di astronomia, studiando e avanzando critiche sul moto dei pianeti sul modello di Tolomeo; in relazione ad esso di concentrò sulle **coniche** e sul ***cono di Apollonio***, intuendo una relazione fra una di esse, l'ellisse, e il moto dei pianeti. In materia, inoltre, costruì un astrolabio piatto, uno strumento che permetteva di individuare la posizione dei pianeti in un determinato istante.

Per la magnifica libertà di parola ed azione, che le veniva dalla sua cultura, accedeva in modo assennato anche al cospetto dei capi della città e non era motivo di vergogna per lei lo stare in mezzo agli uomini. Infatti, a causa della sua straordinaria saggezza, tutti la rispettavano profondamente e provavano verso di lei un timore reverenziale.

La morte

Per questo motivo, allora, l'invidia si armò contro di lei. Alcuni, dall'animo surriscaldato, guidati da un lettore di nome Pietro, si misero d'accordo e si appostarono per sorprendere la donna mentre faceva ritorno casa. Tiratala giù dal carro, la trascinarono fino alla chiesa che prendeva il nome da Cesario: qui, strappatale la veste, la uccisero colpendola con i cocci. Dopo che l'ebbero fatta a pezzi membro a membro, trasportati questi pezzi al cosiddetto Cinerone, cancellarono ogni traccia di lei nel fuoco.

Cartesio

di Annelies Ickx e Chiara Potente

René Descartes, latinizzato in Renatus Cartesius e italianizzato in Renato Cartesio o, in passato, Renato Delle Carte (La Haye en Touraine, 31 marzo 1596 – Stoccolma, 11 febbraio 1650) è stato un filosofo e matematico francese.

È ritenuto fondatore della filosofia e della matematica moderna.

Cartesio estese la concezione razionalistica di una conoscenza ispirata alla precisione e alla certezza delle scienze matematiche, dando vita a quello che oggi è conosciuto con il nome di razionalismo continentale, una posizione filosofica dominante in Europa tra XVII e XVIII secolo.

L'infanzia

Cartesio nacque il 31 marzo del 1596 a La Haye. Il nonno Pierre Descartes era un medico e il figlio Joachim era avvocato a Parigi e acquistò la carica di consigliere del Parlamento. La madre Jeanne Brochard partorì René, terzo figlio dopo le nascite di Jeanne e di Pierre.

René fu battezzato il 3 aprile nella chiesa di Saint-Georges, prendendo il nome dal padrino, lo zio materno e giudice a Poitiers, René Brochard des Fontaines. Fu subito affidato a una balia che si prese a lungo cura di lui. La madre di René morì infatti l'anno dopo dando alla luce un altro figlio che sopravvisse solo tre giorni e Joachim Descartes si risposò intorno al 1600 con Anne Morin, una bretone conosciuta a Rennes, dalla quale ebbe due figli, Joachim e Anne.

Orfano di madre e con il padre spesso assente, furono soprattutto la nonna materna e la nutrice a prendersi cura di René che passò l'infanzia a La Haye con i due fratelli e qui ricevette l'istruzione elementare da un precettore. Il costante pallore e una frequente tosse secca facevano dubitare ai medici che egli potesse vivere a lungo e ritardarono l'inizio dei suoi studi regolari.

Gli studi

Solo nella ricorrenza della Pasqua del 1607 entrò nel collegio di La Flèche - fondato da Enrico IV nel 1603 e assegnato ai gesuiti - che già godeva di alta rinomanza e dove il fratello Pierre vi aveva sùbito iniziato gli studi nel 1604. Gli studenti, provenienti da ogni parte della Francia senza distinzione di classe sociale, erano tenuti al solo pagamento della pensione e i corsi prevedevano tre anni di studio della grammatica, tre anni di studi umanistici e tre anni di

filosofia aristotelica. Coloro che avessero voluto intraprendere la carriera ecclesiastica avrebbero continuato a studiare per altri cinque anni la teologia e le Scritture.
Scarso era l'insegnamento della matematica, impartito per meno di un'ora al giorno ai soli studenti del secondo anno di filosofia. Cartesio si mostrerà poi deluso dell'insegnamento poiché nelle scuole non si promuova lo spirito critico degli allievi.
Uscì dal collegio gesuita nel settembre del 1615, grazie al regime di vita osservato nella scuola, la sua salute si ristabilì completamente. Si stabilì a pensione presso un sarto di Poitiers per studiare giurisprudenza nell' Università di quella città, dove il fratello Pierre si era laureato tre anni prima. Il 9 novembre 1616 ottenne il baccalaureato e il giorno dopo la laurea *in utroque iure*. Si riunì alla famiglia che, dopo il secondo matrimonio del padre, viveva a Rennes- o a Sucé, presso Nantes, dove la matrigna Anne Morin possedeva una casa.

Un incontro che segnò la sua vita…

Raggiunta la maggiore età, con una salute recuperata e il desiderio di conoscere cose nuove, ai primi del 1618 Cartesio si arruolò volontario in uno dei due reggimenti francesi di stanza a Breda, in Olanda, sotto il comando del principe d'Orange. È un periodo di tregua della guerra che oppone la Francia alla Spagna: l'ignoranza e la volgarità dei compagni, e l'ozio forzato a cui era spesso costretto non gli fecero amare l'ambiente militare. Tuttavia quel soggiorno si rivelerà importante sotto un altro aspetto: conobbe casualmente il medico Isaac Beeckman, venuto da Middelburg a Breda per trovare lo zio e una ragazza da sposare ed entrambi si trovarono a cercare di risolvere un problema matematico. Il trentenne Beeckmam esercitò naturalmente una forte attrazione intellettuale su René e ne nacque un'amicizia che, pur contrastata negli anni, indirizzerà decisamente il corso degli interessi di Cartesio verso le scienze matematiche.

La mirabilis scientia

Il 29 aprile 1619, Descartes s'imbarcò da Amsterdam per Copenaghen ma rinunciò al lungo viaggio per dirigersi alla fine di luglio a Francoforte, dove il 27 agosto assistette all'incoronazione di Ferdinando II e s'intrattenne nella città per tutta la durata dei festeggiamenti. Con la ripresa di quella che verrà definita la Guerra dei Trent'anni, sembra che Cartesio si sia arruolato nell'esercito comandato da Massimiliano di Baviera e abbia passato l'inverno a Neuburg, nel nord della Baviera, in una confortevole casa sulla riva del Danubio.
Nel registro regalatogli dal Beeckman, in una sezione che egli stesso intitolò Olympica, scrisse che il 10 novembre, «pieno di entusiasmo», stava scoprendo i «fondamenti di una

scienza mirabile» e narra di sogni e di visioni che resero agitata la notte, ma non sappiamo con precisione a quale scienza qui alludesse Cartesio

Proseguendo le sue ricerche sulle corrispondenze dell'algebra con la geometria, aveva raggiunto la convinzione che il sapere potesse essere unificato in un'unica scienza della quale le singole discipline formavano una branca particolare, come scriverà nelle *Regulae ad directionem ingenii*. Durante quell'inverno conobbe il matematico Johannes Faulhaber, del quale potrebbe esserci qualche influenza nelle ricerche intraprese da Cartesio che portarono alla redazione dei *Progymnasmata de solidorum elementis*, dove tratta delle proprietà dei poliedri. Lasciò Neuburg ai primi di marzo del 1620.

Il ritorno in Francia

Lasciato l'esercito, nel 1622 tornava presso la famiglia a Rennes e si trasferiva nei primi mesi del 1623 a Parigi, ospite di un amico del padre, Nicolas Le Vasseur, che gli presentò il matematico Didier Dounot: in questo lasso di tempo potrebbe aver conosciuto anche Claude Mydorge e Marin Mersenne. In autunno partiva per un lungo viaggio in Italia dove visitò Roma, Firenze e Venezia.

Giunse a Parigi nel maggio del 1625, da questo momento Cartesio adottò quello stile di vita che osserverà per sempre: avendo rinunciato alla carriera militare e ad occupare qualsiasi magistratura, vivrà dei proventi dei suoi possedimenti terrieri che gli assicuravano una condizione libera dal bisogno e gli permettevano di dedicarsi ai suoi studi. Si mantenne in corrispondenza con Beeckman ed entrò in relazione con i matematici Jean Baptiste Morin e Florimond Debeaune, oltre che con il Mydorge, e con i letterati Jean de Silhon, Jacques de Sérisay, Guez de Balzac e col padre Mersenne, già autore di un trattato sull'ottica, la cui sollecitazione può averlo indotto a studiarne i problemi, giungendo a determinare la legge della costanza del rapporto dei seni degli angoli di incidenza e di rifrazione, scoperta da Cartesio successivamente ma indipendentemente da Willebrord Snell. Nel novembre del 1627 fu invitato a prendere parte a una riunione di scienziati e filosofi nella casa del nunzio pontificio Gianfrancesco Guidi di Bagno, dove si trovò a confutare le teorie filosofiche di un certo Chandoux.

Per lavorare con maggiore tranquillità al *Regulea ad directionem ingenii* partì per la Bretagna e poi si trasferì in una sua proprietà nel Poitou. Il testo è stato lasciato incompiuto, in vista dello sviluppo organico del tema del metodo della conoscenza che Cartesio darà nel successivo *Discours*.

In Olanda

Fu nuovamente a Parigi nell'aprile del 1628. In questo periodo sembra abbia scritto un perduto piccolo trattato sulla scherma, *L'art de l'escrime*. In ottobre andò a trovare l'amico Beeckman a Dordrecht, in Olanda. Dopo un nuovo ritorno a Parigi nell'inverno del 1628, partì per l'Olanda nel marzo del 1629. Si stabilì a Franeker, iscrivendosi il 26 aprile nell'Università di quella città per frequentarvi i corsi di filosofia.

Dal 1630 cominciò a lavorare al *Le Monde ou traité de la lumière* che avrebbe dovuto rappresentare l'esposizione della propria filosofia naturale, ma la notizia della condanna, nel 1633, del Galilei e della messa all'Indice del *Dialogo sopra i due massimi sistemi* lo dissuasero dal completare e pubblicare l'opera che in più parti sposava le tesi di Copernico condannate dalla Chiesa. Ne *Il Mondo* Cartesio affronta il problema della fisica, individuando il principio al quale tutti i fenomeni fisici obbediscono.

Nel 1635 conobbe la gioia di diventare padre con la nascita della figlia Francine (la piccola sarebbe morta a soli 5 anni).

Nel 1637 pubblicò il *Discorso sul metodo* e i saggi su *Diottrica*, *Geometria* e *Meteore*. Nel 1641 diede alle stampe la prima edizione delle *Meditazioni metafisiche*. L'anno successivo con la seconda edizione delle *Meditazioni* pubblicò le settime *Obiezioni e risposte*.

Nel 1643 la filosofia cartesiana venne condannata dall'Università di Utrecht. Nel 1644 compose i *Principia philosophiae* e compì un viaggio in Francia. Nel 1647 la corona di Francia gli riconobbe una pensione. L'anno successivo da una lunga conversazione con Frans Burman nacque il libro omonimo.

Precettore di filosofia in Svezia e morte

Nel 1649 accettò l'invito della regina Cristina di Svezia, sua discepola e desiderosa di approfondire i contenuti della sua filosofia, e si trasferì a Stoccolma. Quello stesso anno dedicò il trattato sulle *Passioni dell'anima* alla principessa Elisabetta di Boemia. Cartesio si spense l'11 febbraio 1650 a causa di una sopraggiunta polmonite o secondo altri a causa di un avvelenamento con un'ostia da parte di un frate agostiniano che vedeva nell'insegnamento cartesiano un ideale razionalista che avrebbe causato la conversione della regina Cristina ad un cattolicesimo molto diverso da quello professato dal padre agostiniano. La condanna della Chiesa cattolica nei confronti del pensiero cartesiano non tardò a venire, con la messa all'Indice nel 1663 delle sue opere (poste nell'*Index* con la clausola attenuante *suspendendos esse, donec corrigantur*).

Le ossa di Cartesio

Dopo la morte il corpo di Cartesio venne tumulato in un piccolo cimitero cattolico a nord di Stoccolma dove rimase sino al 1666 quando i resti vennero riesumati per essere portati a Parigi ed inumati nella chiesa di Sainte Geneviève-du-Montdove . Vi rimase sino al 26 febbraio 1819 quando la salma fu nuovamente trasferita e inumata tra altre due lapidi tombali, quelle di Jean Mabillon e di Bernard de Montfaucon, nella chiesa di Saint-Germain-des-Prés.
Si scoprì che gli svedesi ne avevano asportato la testa che ricomparve ad un'asta a Stoccolma dove il cranio fu acquistato e donato alla Francia. Sul teschio, ormai privo della mandibola e della parte inferiore, compaiono le firme di tutti i suoi proprietari dalla fine del Seicento sino al momento della vendita. Secondo l'uso del tempo gli intellettuali infatti tenevano sulla scrivania un teschio, meglio se di un illustre personaggio, a memento della morte comune ed inevitabile. Ma il teschio, attribuito a Cartesio sia per l'età che per le ricostruzioni fatte in base ai ritratti del filosofo, continuò a rimanere separato dal resto del corpo ed esposto al Musée de l'Homme.
In onore del filosofo nel 1801, la sua città natale venne ribattezzata Descartes

Cartesio e la matematica

Regulea e compendium musicae

Nelle *Regulae* Cartesio aveva individuato nella «matematica universale» la «scienza dell'ordine», ossia quella scienza che, stabilendo la disposizione nella quale tutte le varie conoscenze vanno disposte, perché tra di loro legate da comuni principi, è la scienza alla quale tutte le altre fanno capo.
Il motivo per il quale Cartesio studia il suono nel compendium musicae è quello di comprendere in maniera più ampia come la musica riesca a commuoverci. Egli assume di poter comprendere tale proprietà dall'esame che fa delle caratteristiche fondamentali che rendono commovente il suono, ovvero la durata ed il tono. Egli è dell'opinione che una semplice analisi matematica della consonanza possa fornirci le nozioni fondamentali sul modo di produrre il suono e quindi sulla natura della musica.
Cartesio sviluppa l'idea che la dolcezza delle consonanze dipende dalla frequenza con cui i battiti prodotti dai corpi sonori coincidono a intervalli regolari. Tuttavia Cartesio sostiene che la teoria matematica non può fornire un criterio di qualità estetica, criterio che dipende esclusivamente dai gusti dell'ascoltatore.

Geometria analitica

La nascita della geometria analitica è dovuta ai matematici francesi Renè Descartes e Pierre Fermat che la fondarono contemporaneamente ma separatamente. Bisogna precisare che l'intento della geometria cartesiana era la costruzione geometrica.

Cartesio critica la matematica greca: le indagini geometriche erano svolte dagli antichi con procedimenti diversi, facenti uso di artifici variabili da un caso all'altro, non di rado oscuri e ambigui. Se siamo in grado di seguirne passo passo le argomentazioni controllandone l'indubbia coerenza, non riusciamo però a renderci conto del motivo per cui in un caso si facesse ricorso a un tipo di dimostrazione e in un altro caso ad un altro. Restiamo quindi disarmati di fronte a un qualsiasi problema nuovo, dovendo procedere per tentativi, senza alcuna guida sicura.

Si propone quindi di dare ad essa una struttura perfettamente razionale, che faccia uso solo di verità chiare ed evidenti. Per attuare la propria riforma della geometria, ha bisogno di un'unità di misura, che consenta di interpretare un numero come una distanza, e di una coppia di linee fondamentali , che oggi chiamiamo appunto assi cartesiani o coordinanti. In questo modo, punti, rette, curve possono essere individuati univocamente sul piano, in relazione agli assi, attraverso procedimenti algebrici "automatici" facendo così scomparire d'un tratto le differenze inessenziali tra figura e figura permettendo così di raggiungere risultati di amplissima generalità.

È nella sua opera *La Geometrie* che egli **tradusse le operazioni algebriche nel linguaggio della geometria**, mostrando che le quattro operazioni aritmetiche corrispondono a semplici costruzioni effettuate con riga e compasso e applicando di conseguenza termini aritmetici alla geometria. A Descartes va anche il merito di aver introdotto nuove notazioni algebriche simili a quella ancora in uso. Per esempio è cartesiano l'uso delle prime lettere dell'alfabeto per indicare costanti e delle ultime per esprimere le incognite, l'uso dei simboli "+" e "-" e la particolare notazione esponenziale per le incognite (potenza e radice quadrata).

La geometria cartesiana palesò subito i suoi vantaggi, non solo perché consentiva uno studio più sistematico delle **coniche**, ma anche perché forniva chiara definizione delle curve di ordine superiore. Fra i risultati più importanti ottenuti da Cartesio con i procedimenti testé accennati, merita una particolare menzione la determinazione generale della normale a una qualsiasi curva algebrica piana in un suo punto qualunque e la conseguente determinazione della tangente. Questa determinazione risolveva uno dei problemi geometrici piú discussi nel Seicento; essa si prestava inoltre a molte applicazioni, nel cui studio Cartesio diede ripetute prove di una perfetta padronanza delle regole algebriche. Egli ebbe anche il merito di

comprendere che il procedimento seguito nella determinazione della normale a una curva piana poteva essere esteso a una curva gobba; commise tuttavia l'errore di non avvedersi che una curva gobba ammette, in un punto generico, non una ma infinite normali.
Mentre infatti possiamo agevolmente rappresentarci in modo intuitivo le curve corrispondenti ad equazioni di secondo grado (con un compasso per le circonferenze e intersecando il piano e un cono per le altre coniche), per le curve di ordine superiore ci si doveva affidare a metodi più complessi nei quali la nostra capacità di immaginazione spesso viene meno, cosa che rendeva restii i matematici a trattarli come enti geometrici. Con ciò si allargava enormemente il campo della geometria e il procedere episodico e disorganizzato degli antichi lasciava posto ad una trattazione organica e unitaria.
A Cartesio va anche attribuita una regola che mette in evidenza le relazioni esistenti tra i segni dei coefficienti a,b,c ed i segni delle radici x_1 e x_2 detta appunto regola cartesiana dei segni.

Sitografia

http://www.filosofico.net/Antologia_file/AntologiaG/GEYMONAT_%20IL%20SIGNIFICATO%20DELL%20IN.htm

http://it.wikipedia.org/wiki/Cartesio

http://www.ripmat.it/mate/a/af/afcce.html

http://www.itis-molinari.eu/studenti/progetti/scienza/cartesio.htm

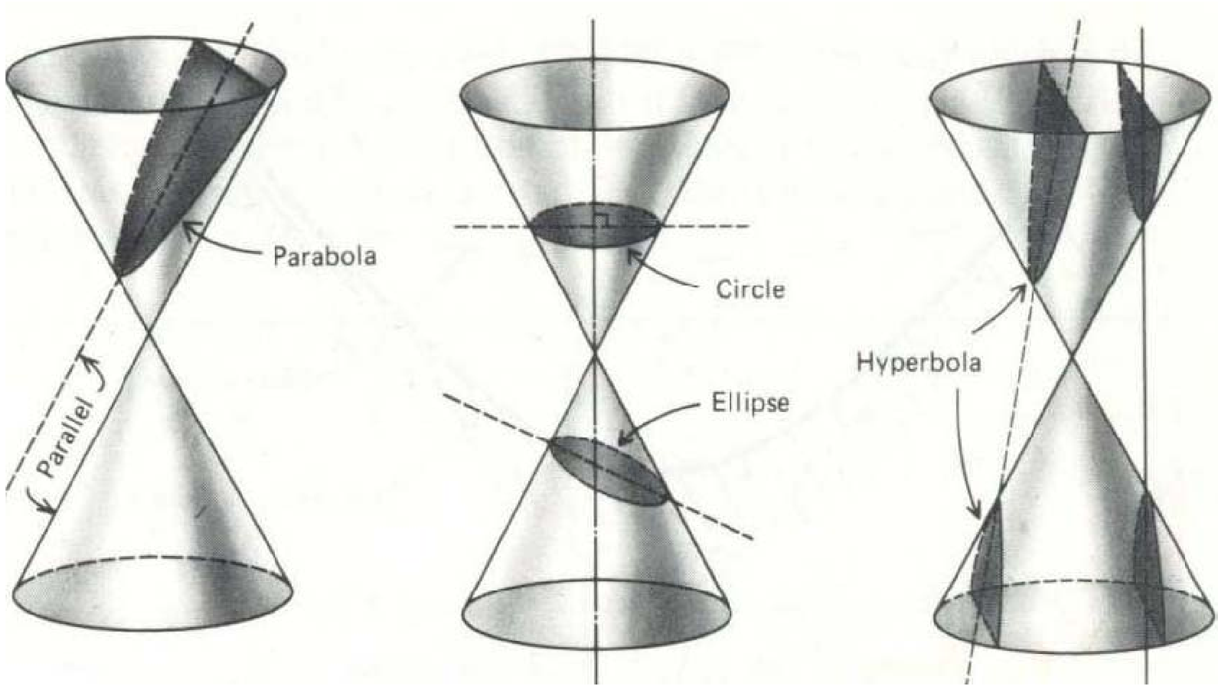
1.2 Teoria

GENERALITÀ SULLE CONICHE

1. Definizioni

Si dice **superficie conica indefinita a due falde** quella ottenute dalla rotazione nello spazio di una retta attorno a un asse passante per un suo punto mantenendo costante l'angolo tra l'asse e la retta; questo punto è il **vertice** comune alle due falde e l'asse è l'asse di simmetria della superficie conica. Le retta che giacciono sulla superficie passano tutte per il vertice e sono dette **generatrici**.

Si definisce **conica** quella curva che si ottiene intersecando una superficie conica indefinita a due falde con un piano non passante per il vertice del cono.



Di dica **semiapertura** della superficie conica l'angolo acuto α formato dall'asse del cono con una generatrice. Si indichi con β l'angolo che il piano forma con l'asse.

Si dice **ellisse** la curva intersezione tra la superficie conica e un piano secante, non passante per il vertice, che formi con l'asse un angolo maggiore della semiapertura ($\beta > \alpha$). In particolare se tale piano è perpendicolare all'asse ($\beta = 90°$) si ottiene come sezione conica una **circonferenza**.

Si dice **iperbole** la curva intersezione tra la superficie conica e un piano secante, non passante per il vertice, che formi con l'asse un angolo minore della semiapertura ($\beta < \alpha$).

Si dice **parabola** la curva intersezione tra la superficie conica e un piano secante, non passante per il vertice, che formi con l'asse un angolo congruente con la semiapertura ($\beta = \alpha$).

2. **Equazione di una conica**

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy di dice che una curva **Ω** è una conica se essa è il luogo geometrico dei punti del piano che con le loro coordinate soddisfano una equazione di secondo grado nelle due variabili

(1) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Se $b^2 - 4ac < 0$ si tratta di un'ellisse.

Se $b^2 - 4ac > 0$ si tratta di un'iperbole.

Se $b^2 - 4ac = 0$ si tratta di una parabola.

In alcuni casi l'equazione (1) può rappresentare una forma degenere di tali coniche , costituita da un punto o da una retta o da una coppia di rette.

3. **Punti che individuano una conica**

L'equazione (1) contiene sei parametri reali (a,b,c,d,e,f) almeno uno dei quali diverso da zero. Quindi è possibile dividere per questo parametro ed ottenere cinque parametri effettivi ed un coefficiente uguale ad 1:
Dunque **cinque** punti di un piano,dei quali non più di tre allineati, individuano una conica.

4. **Posizioni reciproche di una retta e una conica**

Considerando l'equazione (1) e l'equazione di una retta, il sistema delle due equazioni darà un'equazione risolvente di secondo grado con discriminante Δ.
Se $\Delta > 0$, la retta e la conica hanno due punti in comune e sono secanti;
se $\Delta = 0$, la retta e la conica hanno in comune un punto doppio e sono tangenti;
se $\Delta < 0$, la retta e la conica non hanno punti in comune.

5. **Rette passanti per un punto e tangenti a una conica**

Dato un punto P, tutte le rette passanti per esso sono le rette, di coefficiente angolare **m**, del fascio proprio di centro P.
Dovendo soddisfare la condizione di tangenza dovrà essere nullo il discriminante Δ dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione della conica e il fascio.
Ponendo $\Delta = 0$ si ottiene un'equazione in **m**.

Se tale equazione risulta essere:

I. di secondo grado con due radici reali e distinte, si otterranno due tangenti e il punto sarà esterno alla conica;

II. di secondo grado con due radici reali e coincidenti, avremo una sola tangente e il punto appartiene alla conica;

III. di secondo grado con radici complesse coniugate, non esisteranno tangenti e il punto sarà interno alla conica;

IV. di primo grado, si avranno due tangenti, una delle quali sarà parallela a uno degli assi cartesiani (Oy se la variabile eliminata è la y, Ox se è la x);

V. costante, otterremo una tangente doppia, parallela a uno degli assi(Oy se la variabile eliminata è la y, Ox se è la x).

6. Equazione generale della tangente a una conica in un suo punto

Se ripetiamo il procedimento 5. , mantenendo le equazioni generiche di conica e del fascio di rette per $P(x_0;y_0)$ otterremo

$$ax_0x+\frac{b}{2}(x_0y+y_0x)+cy_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0.$$

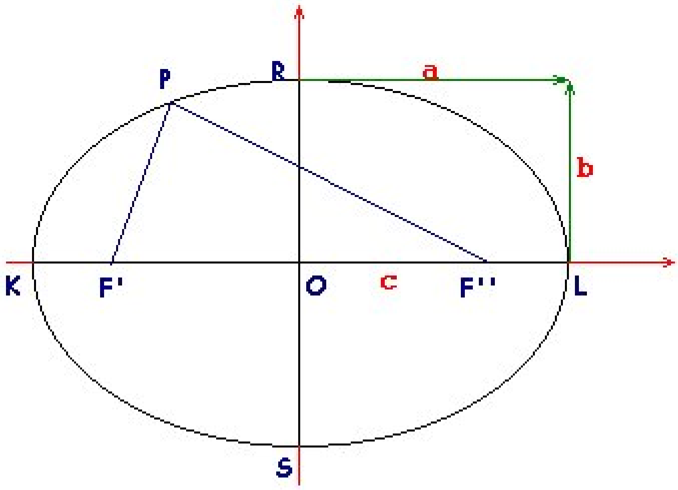
PROVARE!!!

L'ELLISSE

di Fabrizio De Vico, Livia Lucchini

DEFINIZIONE

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti in un piano per i quali è costante la somma delle distanze da 2 punti fissi detti fuochi. La distanza tra i 2 fuochi (F_1F_2) è detta distanza focale e viene indicata con 2c



Nel caso in cui i due fuochi coincidano si ha una circonferenza, che può quindi considerarsi un caso particolare di ellisse.

In geometria l'ellisse è una curva piana ottenuta intersecando un cono con un piano in modo da produrre una curva chiusa. Affinché la sezione conica produca una curva chiusa, l'inclinazione del piano deve essere superiore a quella della retta generatrice del cono rispetto al suo asse.

EQUAZIONE GENERICA

L'equazione generale dell'ellisse avente i fuochi $F_1(x_{F1};y_{F1})$ ed $F_2(x_{F2};y_{F2})$ posti in posizione generica sul piano cartesiano e avente il semiasse maggiore denotato con a è data da:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

EQUAZIONE

L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i due fuochi $F_1(x_1;y_1)$ ed $F_2(x_2;y_2)$ e un punto generico P(x;y) con l'asse maggiore:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Per trovare l'equazione canonica dell'ellisse, con centro nell'origine e i fuochi sull'asse delle ascisse, si calcola la distanza fra i punti, ponendo:

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad x_1 = -c \quad x_2 = c$$

si ha:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ con } c < a$$

È quindi possibile operare una traslazione per spostare il centro dall'origine:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

in cui

- a = semiasse maggiore
- b = semiasse minore
- la relazione tra a, b, c è: $a^2 - c^2 = b^2$
- se a < b l'ellisse avrà i fuochi sull'asse y
- se b < a l'ellisse avrà i fuochi sull'asse x

ECCENTRICITA'

L'eccentricità, indicata con "e", di un'ellisse è compresa tra 0 e 1 ed è il rapporto della distanza tra i due fuochi $F_1(-c; 0)$ ed $F_2(+c; 0)$ e la lunghezza dell'asse maggiore 2a, se i fuochi sono sull'asse x:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

oppure tra i fuochi e la lunghezza dell'asse maggiore 2b, se i fuochi sono sull'asse y:

$$e=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$$

L'eccentricità rende conto della forma più o meno schiacciata dell'ellisse: quando è pari a zero, i due fuochi coincidono e l'ellisse degenera in una circonferenza. Man mano che l'eccentricità tende a 1, l'ellisse si schiaccia sempre più e quando assume il valore unitario essa degenera in un segmento lungo 2a.

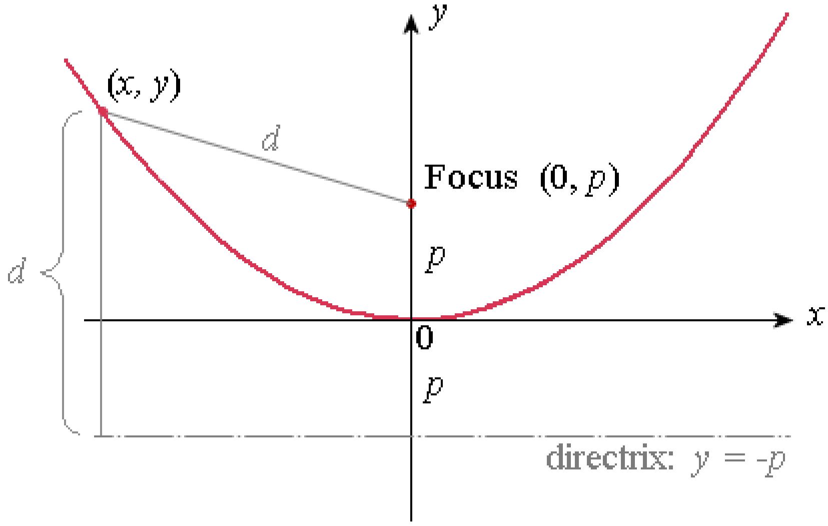
STORIA DELL'ELLISSE

L' ellisse fu inizialmente studiata da Menecmo, poi da Euclide. Il nome fu dato da Apollonio. Nel 1600, Keplero scoprì che le orbite dei pianeti erano delle ellissi con il sole in uno dei fuochi. In effetti fu Keplero che per primo utilizzò la parola Fuochi pubblicando le sue scoperte nel 1609. Nel 1705 Halley mostrò che la cometa che ha poi preso il suo nome si muove di un'orbita ellittica attorno al sole.

LA PARABOLA

di Matteo Vita , Filippo De Palma e Filippo Mariano

DEFINIZIONE



Una parabola è una figura geometrica ottenuta come intersezione di un cono circolare e un piano parallelo ad una retta generatrice del cono. Inoltre la parabola è definita "luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso F (detto fuoco)e da una retta data *d* (detta direttrice) ". Essa è caratterizzata da un vertice e da un asse di simmetria: con vertice si intende il punto equidistante da F e da *d*, mentre per asse di simmetria si intende la retta passante per il vertice e perpendicolare alla direttrice.

DISEGNO

Utilizzando un compasso ed una riga è possibile costruire una parabola nel seguente modo: data la retta *d* ed il fuoco F si conduca per F la retta *r* perpendicolare alla direttrice e sia H il piede di tale perpendicolare. Si consideri il punto medio V di FH: esso sarà il vertice della parabola e la retta *r* sarà l'asse di simmetria. Prendiamo un punto qualunque M sulla retta *r* e da M conduciamo la parallela *k* alla direttrice*;* i punti di questa retta distano dalla direttrice del segmento MH, quindi, se facciamo centro nel punto F e con raggio uguale al segmento MH tracciamo una circonferenza, i punti P e Q di questa circonferenza con la retta *k* appartengono alla parabola perché sono equidistanti dal fuoco F e dalla direttrice *d*. Facendo variare la retta *k* e ripetendo la costruzione si trovano quanti punti si vogliono della parabola.

EQUAZIONE

Per quanto riguarda l'equazione della parabola, se ne possono individuare diversi tipi: quella della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y,

ovvero $y=ax^2+bx+c$,

quella della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x,

ovvero $x=ay^2+by+c$.

Nei casi in cui gli assi di simmetria coincidano con gli assi cartesiani, allora si avranno parabole con equazioni: $y=ax^2$, e $x=ay^2$. Il variare del parametro a influisce sulla concavità della parabola, ovvero l'apertura della curva: se a è positivo la concavità sarà rivolta verso l'alto, se a sarà negativo, verso il basso. Nel caso di $a=0$, la parabola con equazione $y=ax^2$, si ridurrà a $y=0$, ovvero la parabola degenererà nell'asse x.

Prendiamo ora in considerazione la parabola con equazione $y=ax^2+bx+c$. Per trovare le coordinate di vertice e fuoco, l'equazione dell'asse di simmetria e della direttrice, bisogna usare le seguenti formule:

V $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, F$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$, direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.Se invece prendiamo in considerazione la parabola con asse parallelo all'asse x,le coordinate del vertice e del fuoco saranno:

V$\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$, F$\left(\frac{1-\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$,mentre l'equazione dell'asse di simmetria e della direttrice:

$y= -\frac{b}{2a}$ e $x=-\frac{1+\Delta}{4a}$.

Mentre il coefficiente a è legato alla concavità della parabola, il coefficiente b è legato alla posizione dell'asse della parabola. La retta tangente alla parabola nel punto di incontro con l'asse delle ordinate, ha pendenza pari a b. Questo significa che se b vale zero, l'asse della parabola coincide con l'asse delle ordinate. Il coefficiente c, invece, determina il punto di intersezione della parabola con l'asse delle ordinate. Ciò è facilmente verificabile mettendo a sistema l'equazione dell'asse y con quella di una generica parabola:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = a(0)^2 + b(0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases}$$

Se il termine c è nullo, la parabola passa per l'origine degli assi.

FASCIO DI PARABOLE

In geometria analitica, un fascio di parabole si ottiene mediante una combinazione lineare, vale a dire effettuando la somma di due equazioni (in forma implicita) entrambe rappresentanti parabole (che saranno le generatrici del fascio) e moltiplicando una di esse per un parametro (in questo caso **k**):

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a_1x^2 - b_1x - c_1) = 0$$

In questo caso, le due parabole presentano l'asse parallelo all'asse y.

Una delle due parabole generatrici, ed esattamente quella moltiplicata per il parametro, sarà esclusa dal fascio, perché non si otterrà per nessun valore di k. Essa viene quindi definita la *parabola esclusa* del fascio, e si ottiene solo se k assume un valore infinito, che però non è un numero reale.

Effettuando i vari calcoli, il fascio si presenta in questa forma, la forma canonica di un fascio di parabole:

$$y(k+1) - x^2(a + a_1 k) - x(b + b_1 k) - (c + kc_1) = 0$$

Un fascio di parabole può presentare o meno punti base, ovvero punti attraverso i quali passano tutte le parabole del suo fascio. I punti base di un fascio si ottengono mettendo a sistema le equazioni delle due parabole generatrici. Eguagliando le y delle due equazioni si otterrà quindi la seguente equazione:

$$x^2(a - a_1) + x(b - b_1) + c - c_1 = 0$$

A questo punto si presenteranno diverse possibilità: se il discriminante di questa equazione è positivo, esisteranno due punti base distinti che, sostituiti nell'equazione del fascio, la soddisferanno; se il discriminante è nullo, allora i due punti base saranno coincidenti e tutte le parabole del fascio ammetteranno una tangente comune e saranno tangenti fra di loro nei due punti base coincidenti, che apparterranno a questa tangente; se il discriminante è negativo, non esisteranno punti base.

Riassumendo:

$\Delta > 0$ due punti base reali e distinti

$\Delta = 0$ due punti base reali e coincidenti

$\Delta < 0$ non esistono punti base

Se k assume valori tali che il coefficiente del termine di secondo grado si annulli, l'equazione del fascio di parabole si riduce all'equazione di una retta, del tipo $ax + by + c = 0$, equazione che, nel caso in cui i punti base sono reali e distinti, è la retta passante per questi, nel caso in cui sono reali e coincidenti, è la retta tangente a tutte le parabole del fascio, nel caso in cui non esistono, è una retta qualunque del fascio.

Se k assume valori tali che il coefficiente della y si annulli, l'equazione del fascio di parabole si riduce ad un'equazione di secondo grado in x, del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, equazione che rappresenta una coppia di rette, parallele all'asse y (nel caso di questo fascio) e passanti per le ascisse dei due punti base del fascio. Se questi non esisteranno, il fascio non conterrà coppie di rette, se saranno coincidenti, le rette della coppia saranno anch'esse coincidenti.

Se k non assume valori per cui si possano ottenere rette o coppie di rette, o le une o le altre non sono presenti nel fascio. Si noti che in molti casi le due generatrici del fascio sono proprio una retta e una coppia di rette, e che solitamente è la coppia di rette a venire moltiplicata per il parametro e ad essere quindi esclusa dal fascio.

1.3 Laboratorio

COSTRUZIONE DI

"TRACCIATORI DI CONICHE"

Gli studenti che hanno lavorato alla costruzione sono:
Guglielmo Mazzà, Andrea Petrini, Vito Conte, Diego Bellante, Raffaella Pizzichetti, con l'aiuto del dottor Diego Urbani e della professoressa Patrizia Cassieri.

DEFINIZIONI

Le coniche sono luoghi geometrici generati dall'intersezione di un piano con un cono (doppio) dato dalla rotazione di una retta intorno ad un punto con un angolo α.
L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la somma della distanza da due punti fissi detti fuochi.
La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta data detta direttrice.

SCOPO DEL PROGETTO

Costruire degli strumenti atti a realizzare graficamente alcune coniche ed, in particolare, ellissi e parabole. Questi strumenti sono chiamati "ellissografi" e "parabolografi".
Attraverso la loro realizzazione verificare in pratica le definizioni delle singole coniche.

Abbiamo, attraverso una ricerca sul Web, individuato alcuni di questi strumenti che, secondo noi, possedevano quei requisiti di chiarezza e semplicità costruttiva alla portata anche di persone non troppo esperte in costruzioni meccaniche e piccola falegnameria.

Dopo aver bene studiato i disegni per individuare i punti fissi e mobili e le varie difficoltà che ci si sarebbero potute presentare nella realizzazione pratica, abbiamo intrapreso la costruzione.

Nel nostro liceo sono disponibili alcune piccole attrezzature con cui gli studenti possono cimentarsi nel dare vita ai loro progetti.

Per le costruzioni in questione siamo ricorsi ai seguenti:

MATERIALI:

- regoli in legno
- pannelli in truciolato laminato per le basi
- viti, dadi e rondelle
- chiodi
- mordenti per legno e vernice trasparente alla nitrocellulosa
- colla vinilica

STRUMENTI:

- calibro, metro a nastro e doppio decimetro
- minitrapano elettrico a colonna
- minitrapano elettrico
- frese e punte da trapano
- morsa
- seghetto
- pinze piatte
- cacciaviti (stella/spacco)
- lime e raspe
- pennelli
- carta vetrata.

COSTRUZIONE

Abbiamo riportato su disegno in scala 3:1 tutte le misure ed i necessari particolari costruttivi dei tracciatori di coniche scelti sul Web.

Successivamente ci siamo ricavati i vari pezzi da regoli di legno opportunamente sagomati e forati.

Una certa difficoltà ha presentato la realizzazione delle scanalature nei regoli, indispensabili per lo scorrimento dei medesimi a formare i poligoni articolati su cui si basano i nostri ellissografi ed il parabolografo. Tali scanalature sono state fatte praticando una serie di fori vicinissimi con un piccolo trapano a colonna. I fori sono poi stati uniti mediante un delicato lavoro di lima a formare le scanalature.

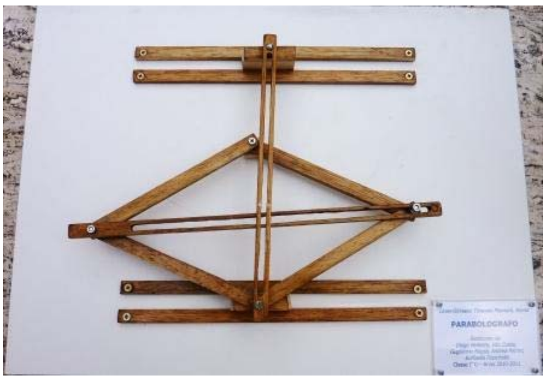
Abbiamo effettuato un primo assemblaggio per verificare il funzionamento, dal quale sono derivate varie modifiche per migliorare la scorrevolezza e la maneggevolezza degli apparecchi. Una volta risolti tutti i problemi, gli apparecchi sono stati definitivamente montati su delle basette in truciolato ricoperte di laminato plastico bianco e recanti le targhette illustrative da noi realizzate.
Prima del montaggio definitivo, tutti i regoli sono stati accuratamente carteggiati, colorati con mordente per legno e verniciati con trasparente alla nitrocellulosa.

Esposti, poi, presso il Museo di matematica del liceo.

Il lavoro finito è stato documentato con le necessarie fotografie!!!

Gli ellissografi

Il parabolografo



CAPITOLO 2 *APPLICAZIONI*

DAI PRINCIPIA ALLA REALTÁ

di Matteo Bohm, Guglielmo de Simone e Tullio Rocca

Un campo in cui le coniche rivestirono una notevole importanza fu l'arte, principalmente durante il Rinascimento e il Barocco. Nel Rinascimento le coniche minori (quelle diverse dalla circonferenza) non sono più pure forme geometriche, ma si ritrovano nelle forme prospettiche di pittori e architetti. L' ellisse compare negli archi e in alcune costruzioni, infatti una caratteristica dell'arte di questo periodo è l'uso privilegiato che si fece della linea curva: i tutto deve prendere andamenti sinuosi, persino le gambe di una sedia o di un tavolo devono essere curvi. Le curve che un artista barocco usa non sono mai semplici, quali un cerchio, ma sono sempre più complesse, come le ellissi.

NOTA

Le chiese ellittiche sono edifici di culto cristiano a pianta centrale di forma ellittica. La loro costruzione si diffonde soprattutto nei secoli XVII e XVIII, nell'epoca, cioè della Rivoluzione scientifica: ne risulta un indiretto omaggio alle leggi di Keplero.

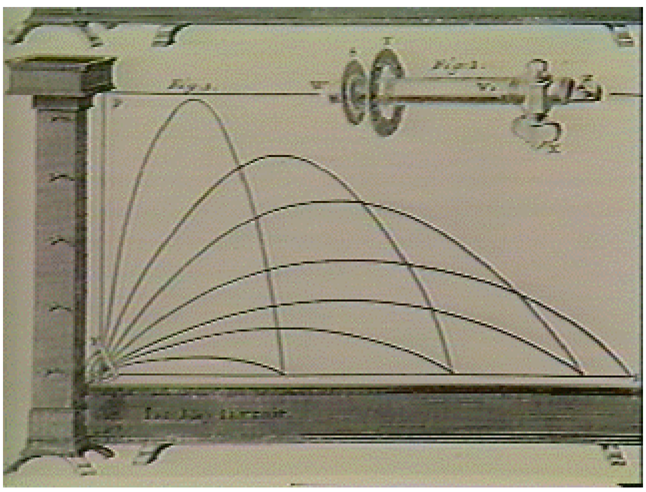
Il disegno ellittico riguarda, normalmente, la sola pianta interna, mentre l'esterno conserva forme più tradizionali.

Da notare come alcune piante ritenute ellittiche, siano invece basate sulla figura geometrica dell'ovale, diffusa dal trattato di Sebastiano Serlio. Tra queste la chiesa di Sant'Andrea al Quirinale (foto a lato) ***a Roma.***

Le coniche si ritrovano anche in molti settori della matematica e della fisica.

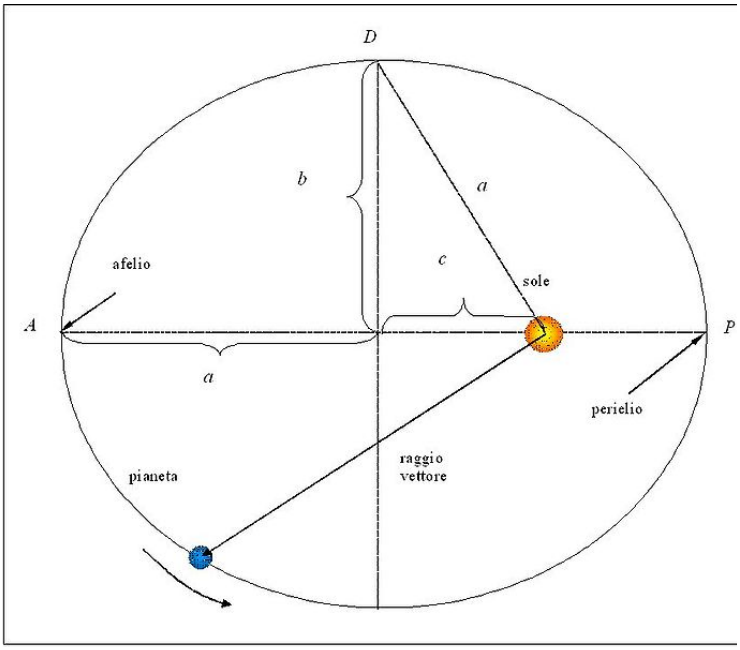
Nel XV secolo lo studio delle Coniche di Apollonio sarà anche di guida a Keplero (1571-1630) per la formulazione delle tre leggi sul moto dei pianeti che portano il suo nome. Formulò per le coniche quello che noi chiamiamo un principio di continuità, nel senso che "vide" i diversi tipi di sezioni coniche come formanti un insieme privo di interruzioni o salti. Dalla sezione conica formata semplicemente da due rette che si intersecano, nella quale i due fuochi coincidono con il punto di intersezione, si passa attraverso un numero infinito di iperboli via via che un fuoco si allontana sempre più dall'altro senza soluzione di continuità. Quando poi un fuoco è infinitamente lontano, non si ha più l'iperbole a due rami, ma la parabola. Quando il fuoco, continuando a muoversi, "oltrepassa l'infinito" e torna ad avvicinarsi dall'altra parte, si passa attraverso un numero infinito di ellissi fino a che, quando i fuochi tornano a coincidere, si ottiene la circonferenza. Forse possono sembrare concetti un po' astratti, ma oggi possiamo comprendere meglio l'idea di Keplero grazie all'uso delle tecnologie informatiche. L'idea che la parabola abbia due fuochi di cui uno improprio, cioè all'infinito, è dovuta dunque Keplero, così come il termine fuoco (dal latino focus, focolare, derivante dalla proprietà fisica già nota ad Archimede, che, sembra, la utilizzò contro le navi romane che assediavano Siracusa, per cui uno specchio parabolico concentra i raggi paralleli provenienti dal sole in un punto che è il fuoco geometrico).

Inoltre le coniche trovarono importanti applicazioni nel campo dei fenomeni ondulatori. Per la legge della riflessione della luce, un paraboloide rotondo, cioè una superficie ottenibile facendo ruotare di un giro completo una parabola attorno al proprio asse, presenta particolari proprietà che gli permettono di essere utilizzato come potente telescopio, come riflettore, come antenna per le comunicazioni spaziali…



Nel '600 per la prima volta le sezioni coniche vengono applicate nella meccanica. A 2000 anni dalla loro scoperta, parabola ed ellisse entrano nella nuova scienza. Nel 1609 Galilei (1564 - 1642) annuncia le leggi della balistica, da cui si ricava che la traiettoria di un proiettile è parabolica.

Sempre alla stessa data si fa risalire la pubblicazione da parte di Keplero delle sue prime due leggi che regolano il moto dei pianeti attorno al Sole, delle quali la prima stabilisce che l'orbita non è circolare ma ellittica, con il Sole in uno dei due fuochi.

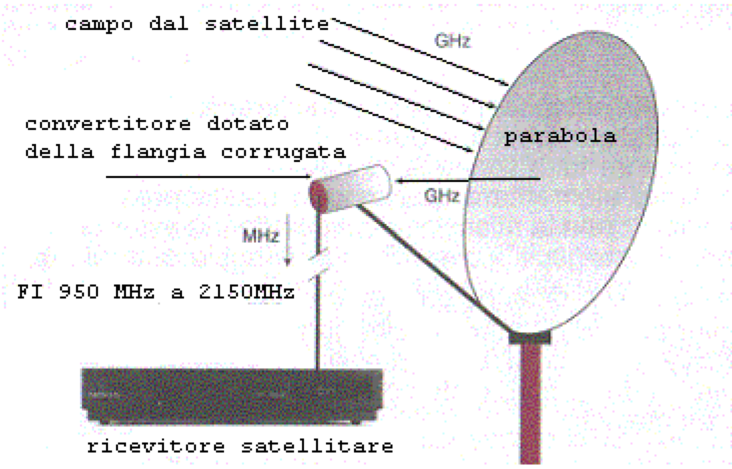


Più tardi, nel 1687, Newton scopre che un'orbita a sezione conica richiede una forza gravitazionale inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Viceversa, quindi, una tale forza produce orbite a sezione conica (vedi balistica). Per esempio quando un aereo in volo spegne i motori, inizia una traiettoria ellittica, approssimativamente parabolica, di caduta libera che dipende dalla direzione e dalla velocità alla quale stava procedendo. Se gli si fa percorrere la stessa traiettoria in verso contrario, con le stesse velocità istantanee, si annulla l'influsso della gravitazione. Quest'effetto è sfruttato nei "voli parabolici" che allenano gli astronauti all'assenza di gravità.

Per quanto riguarda i corpi celesti, un'orbita ellittica è descritta da un corpo di massa trascurabile attorno ad una massa dominante. Tenendo conto delle masse dei due corpi, invece, essi si muovono su un'orbita ellittica attorno al comune baricentro. Anche le comete, che ritornano periodicamente, si muovono su orbite ellittiche la cui lunghezza dipende dal loro periodo. Quelle che non ritornano si muovono invece su orbite paraboliche. Per trovare orbite iperboliche andrebbe invece guardato il moto di particelle elettricamente cariche, anche se in teoria sarebbe possibile l'esistenza di comete che si muovano secondo questo tipo di orbite.

Dal punto di vista geometrico, nei casi di ellissi e iperbole i segmenti che congiungono un punto della conica con i suoi fuochi formano angoli uguali con la tangente alla curva in quel punto.

Per quanto riguarda la parabola, vale la stessa proprietà ma con uno dei due segmenti che è parallelo all'asse di simmetria della stessa. Ciò causa l'effetto per il quale tutti i raggi paralleli all'asse della parabola vengono riflessi in modo da passare per il fuoco, proprietà sfruttata



dalle antenne paraboliche, o paraboloidi di rotazione, ottenuti ruotando la parabola attorno al proprio asse, che concentrano così in corrispondenza del fuoco, segnali provenienti da fonti molto lontane. Nel caso dell'ellissi, secondo le leggi della riflessione, i raggi emessi da uno dei due fuochi vengono riflessi in modo da passare tutti per l'altro fuoco. Le leggi della riflessione valgono anche per le onde sonore o elettromagnetiche, per cui in un locale a pianta ellittica due persone poste nei due fuochi potrebbero conversare parlando a bassa voce anche trovandosi a grande distanza.