

Dall'abaco ai numeri indiani
La numerazione decimale posizionale

Docenti: N. Allegretti , p. Cassieri

Studenti: F. Noccioli, V. Vecchio

a. sc. 2007/2008

Dall'abaco ai numeri indiani. La numerazione decimale posizionale

Per scrivere i numeri utilizziamo il sistema decimale posizionale, definito da Otto Neugebauer, “una delle più feconde invenzioni dell’umanità”. Basare il sistema numerico sul dieci e sul principio della posizione, per il quale una stessa cifra assume un valore diverso a seconda del posto che occupa, ha rappresentato una vera e propria invenzione e rivoluzione al tempo stesso, di cui forse oggi non ci rendiamo conto.

Come si è arrivati al sistema decimale posizionale?

Tutti i popoli dell’antichità usano, prima dell’introduzione dei sistemi di numerazione, strumenti per calcolare. Uno di questi è l’abaco, il più antico ed il più semplice che evita calcoli lunghi e complessi. Sembra proprio che dagli antichi abachi a righe derivi la nascita del sistema posizionale in cui ogni gettone assume il valore di dieci gettoni della riga immediatamente a destra.

Il termine “abaco” equivale alla parola greca “tavolo” e alla semitica “polvere” infatti i primi abachi erano tavoli ricoperti da uno strato di sabbia su cui si tracciavano simboli e figure.

L’abaco di Salamina ne è un esempio; un rettangolo di marmo di 149x75 cm, per lungo tempo ritenuto un tavolo da gioco, è in verità lo strumento di lavoro di un mercante o di un banchiere come rivelano simboli di unità monetarie posti a lato.

Così come un vaso del IV secolo a.C. che mostra il Re Dario circondato da dignitari; uno di questi ha in mano un sacchetto di monete, tributo di un popolo sconfitto, da consegnare al tesoriere persiano che annota su una tavoletta, analoga a quella di Salamina, $\tau\alpha\lambda\alpha\nu\tau\alpha$ H, “cento talenti”.

I Romani utilizzano tavolette rettangolari con scanalature parallele al lato minore dove pedine mobili vengono fatte scorrere.

In Giappone e in Cina si usano rispettivamente l’abaco Soroban e Suan Pan, realizzati con bacchette di bambù, sostituite in seguito da tavole lignee su cui linee e colonne indicano i diversi ordini del sistema di numerazione.

Nel 1200, con l’introduzione delle cifre indiane, delle quali gli Arabi sono stati solo il filtro, l’ “abbacus” di cui parla Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, non è più lo “strumento per contare” ma “l’arte del contare”. Nonostante ciò i metodi di calcolo strumentale non scompaiono, anzi, fino al 1500 rappresentano una valida alternativa alle cifre arabe.

Nell’ XI secolo vengono usati gli “apici” assai simili ai numeri arabi occidentali. Nel XV secolo viene si passa da nove a dieci cifre. La decima è lo zero che gli arabi indicano con un puntino o un cerchietto e chiamano “sunya” cioè “assenza”. Sono in seguito i matematici Arabi a chiamarlo “as-zifr”, “vuoto” che si trasforma via via in zero.

Queste sono le tappe per arrivare al nostro sistema di numerazione decimale e posizionale.

Fare di conto nell'antichità

La sottrazione per complemento consiste nel sommare a partire dalla colonna delle unità la cifra del minuendo con il complemento a 10 della cifra del sottraendo nella stessa colonna e, scritte le unità del risultato, procedere poi analogamente con la colonna subito a sinistra con l'accorgimento che se la somma parziale trovata nella colonna precedente non supera 10 si deve calcolare non il complemento a 10 ma il complemento a 9.

$$\begin{array}{r}
 548 \quad - \\
 \hline
 367 \\
 \hline
 181
 \end{array}$$

Diagram illustrating the subtraction process for 548 - 367 using complements:

- From 367, arrows point to $6+5=11$ (left) and $3+8=11$ (right).
- A downward arrow from 367 points to $4+4=8$.

Moltiplicare e dividere in Egitto: Si scompone il moltiplicando nella somma delle potenze del 2 compreso $2^0 = 1$; e poi si vanno a segnare i multipli, secondo le potenze del 2, del moltiplicatore. Quindi sulla colonna di sinistra si segnano i numeri che danno per somma il moltiplicando, su quella di destra i loro corrispondenti la cui somma è il prodotto cercato.

13 x 12

*	1	12	*	fattore II
	2	24		
*	4	48	*	
*	8	96	*	

fattore I	13	→	156	prodotto

Invertendo il procedimento si eseguono le divisioni; nella colonna di destra si scrive il divisore in alto con i suoi multipli per le potenze del 2, il dividendo in basso, e si contrassegnano gli elementi che danno la somma di quest'ultimo. Gli elementi corrispondenti nella colonna di sinistra (sempre costituita dalle potenze del 2) danno, una volta sommati, il quoziente.

350 : 14

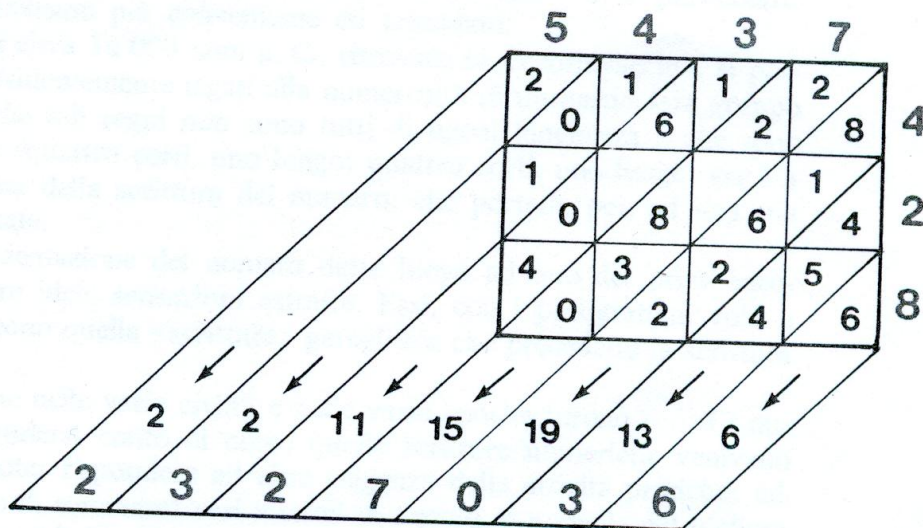
*	1	14	*	divisore
	2	28		
	4	56		
*	8	112	*	
*	16	224	*	

quoziente	25	←	350	dividendo

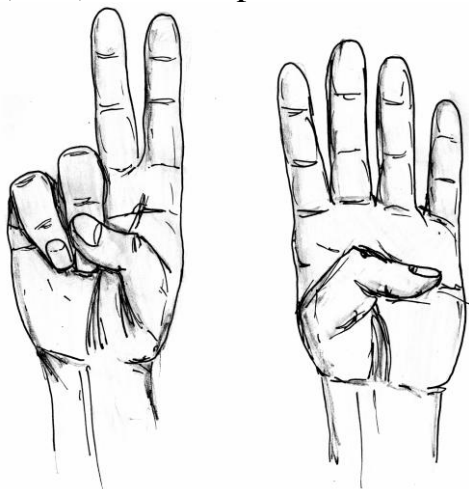
Sulla tavola dei conteggi si scrive nella prima e nell'ultima riga il moltiplicatore ed il moltiplicando. si calcolano i prodotto parziali e si annotano da destra a sinistra con tante caselle vuote a destra quante la somma delle caselle alla destra dei fattori. Il risultato si ottiene addizionando per colonne.

				8	6
	1	6			
		6	4		
			4	0	
		1	2		
			4	8	
				3	0
	2	4	5	1	0
			2	8	5

Il metodo per gelosia. Gelosia è il nome della grata posta a protezione delle finestre e dunque, come si legge ad esempio nel trattato di Francesco Feliciano, *Scala grimaldelli*; metodo noto agli Arabi come a caselle o a reticolo, consiste nello scrivere moltiplicando e moltiplicatore lungo due dei lati di un rettangolo diviso in caselle a loro volta divise a metà lungo la diagonale entro cui si segnano decine e unità dei prodotti incrociati delle singole cifre di moltiplicando e moltiplicatore, poi si somma lungo le diagonali.



Loquela digitorum, tecnica usata nel medioevo, è il semplice alzare n dita di una mano e m dita dell'altra; per ottenere il risultato della moltiplicazione si somma a $(n+m)$ decine il prodotto dei numeri delle dita piegate.

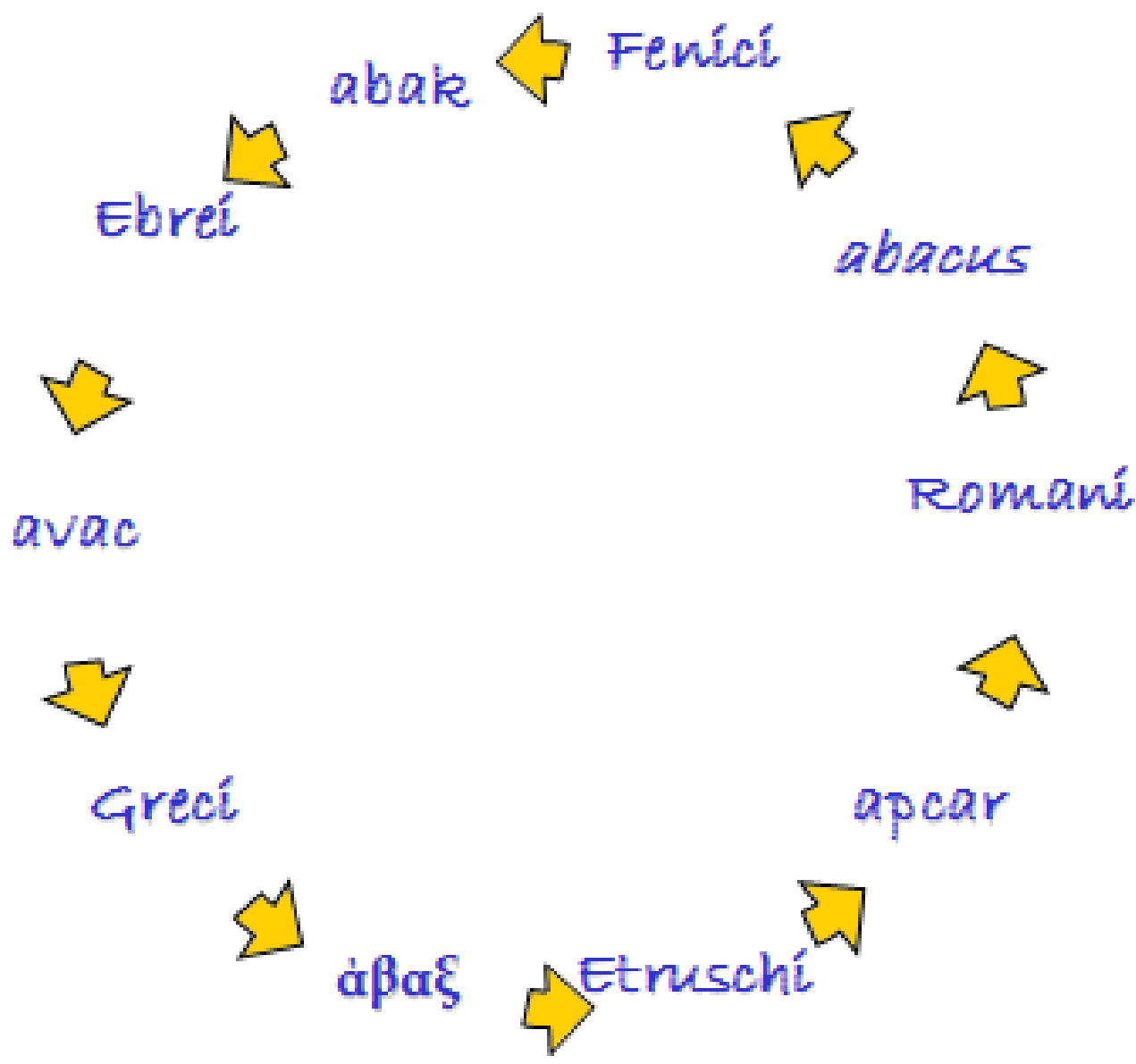


$$(2 + 4) \times 10 + 3 \times 1 = 60 + 3 = 63$$

DALL'ABACO AI NUMERI INDIANI
La numerazione decimale posizionale

*La storia di una delle più feconde
invenzioni dell'umanità*

Otto E. Neugebauer



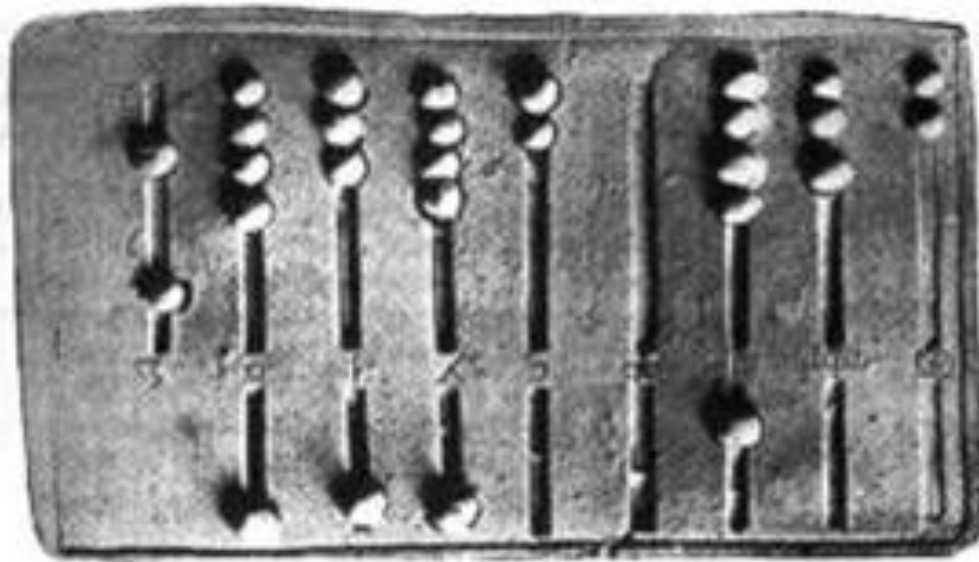
La tavola di calcolo di Salamina



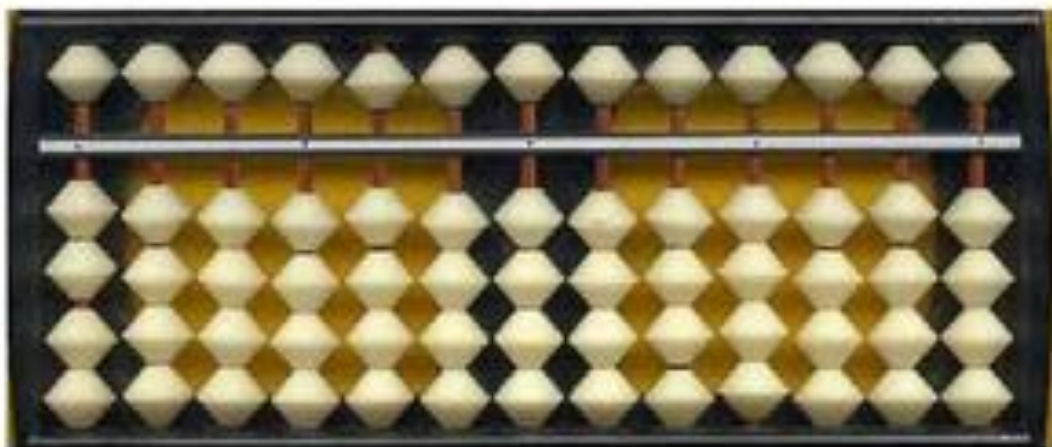
unità
monetarie

L'abaco del Re Dario





Abaco romano



Soroban

算

Suan "calcolare"



Suan Pan

Due modi di calcolare a confronto



"L'abaco procura un'esperienza multisensoriale; infatti l'abacista vede muoversi le palline, le sente tintinnare quando urtano una contro l'altra, le percepisce nel suo insieme. Sicuramente non esiste un altro calcolatore digitale che abbia un'attendibilità così alta in proporzione al basso costo di acquisto e di manutenzione".

Martin Gardner

Gli apici del Medioevo

apices et columnas de tabula de Gerbert, manuscritt latin di Xth secle

		Si pos	ce len tis	uim e ill as	ze nis	cale tis	avi nas	Ar lus	or nus	An dra	lq in
		⓪	7	8	Λ	6	9	∞	∞	7	1
		̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄
		̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄
		̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄
		̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄
		̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄	̄

APICI XI SECOLO

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CIFRE ARABE

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CIFRE INDIANE

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

APICI XV SECOLO

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



$$3 \times 60 + 2 \times 10 + 2$$



$$12 \times 60 + 3 \times 10 + 4$$



$$3 \dots 3 \times 60 \dots ?$$



$$2 \times 60 + 5 = 125$$



$$2 \times 60^2 + 0 \times 60 + 5 = 7205$$

Sunya

As – zifr

Zefir

Zephirum

Zefiro

Zevero

Zero

<<...cum his itaque novem figuris,
et cum hoc signo 0, quod arabice
zephirum appellatur, scribitur
quilibet numerus.>>

Leonardo Pisano

Fare di conto nell' antichità

La sottrazione per complemento

$$\begin{array}{r} 548 \quad - \\ \hline 367 \quad = \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 6+5=11 \quad 4+4=8 \quad 3+8=11 \\ \hline 181 \end{array}$$

Moltiplicare e dividere in Egitto

13 x 12

*	1	12	*	fattore II
	2	24		
*	4	48	*	
*	8	96	*	

fattore I 13 → 156 prodotto

350 : 14

*	1	14	*	divisore
	2	28		
	4	56		
*	8	112	*	
*	16	224	*	

← ←
 quoziente 25 350 dividendo

*La tavola
dei conteggi*

				8	6
	1	6			
		6	4		
			4	0	
		1	2		
			4	8	
				3	0
	2	4	5	1	0
			2	8	5

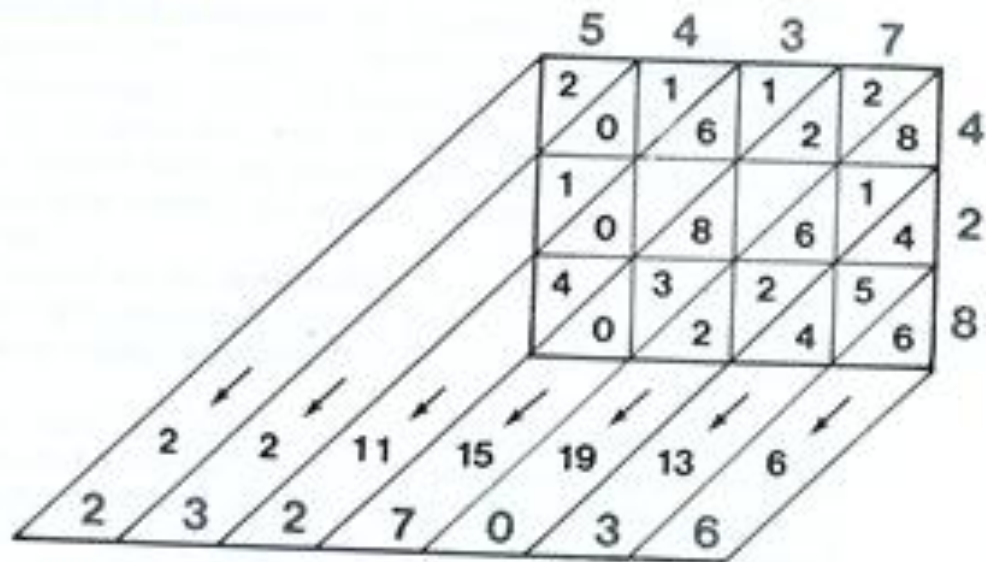
«Moltiplicar per gelosia over per graticola si è per certa similitudine di quelle che si mettono alli balconi, over finestre, per ché le donne non si vedano s'esse non vogliono. Il qual si fa al modo del quadrilatero, e ogni cosa si mette giù, fatto la figura, come vedi qui da carta.»

	9	5	4	
2	2	0	1	3
9	0	0	0	4
3	3	1	1	4
	2	3	6	

Francesco Feliciano

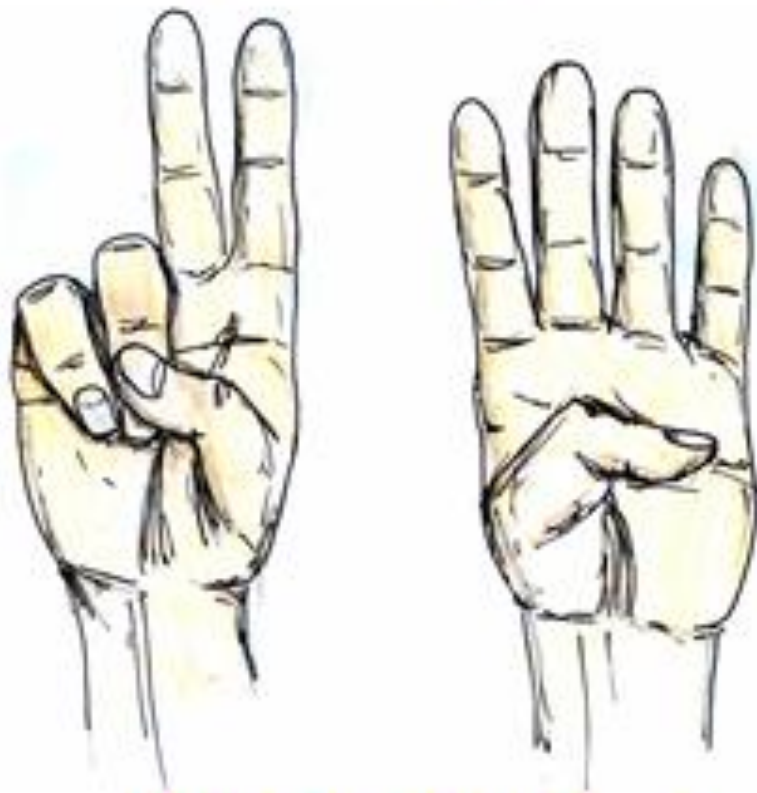
Il metodo "per gelosia"

5437 x 428



= 2327036

Loquela digitorum



$$(2 + 4) \times 10 + 3 \times 1$$

$$60 + 3$$

$$63$$

